

Владимир Викторович Яковлев

Особенности вращения

**ЧАСТЬ 1. Исторический обзор представлений
об особенностях явлений гидродинамики**



Россия, Пенза, 2017 год

Оглавление

1.	1858 год. Роджерс – О формировании вращающихся колец	3
2.	1858 год. Гельмгольц - Основы вихревой теории.....	8
	Определение вращения	9
	Свойства вихревого движения	11
	Свойства прямолинейных параллельных вихревых нитей.....	12
	Свойства кольцеобразных вихревых нитей	13
3.	1867 год. Вильям Томсон Кельвин - О вихревых атомах	15
4.	1887 год. Жуковский – Лекции по гидродинамике	17
5.	1891 год. Жуковский - Основы теории вихрей	19
6.	1901 год. Роберт Вуд - Вихревые кольца.	25
7.	1907 год. Жуковский - Заметка о движении вихревых колец	27
8.	1929 год. Титъенс - Гидроаэромеханика	29
9.	1932 год. Ламб - Гидродинамика	34
	Потенциал скоростей	34
	Линии тока в жидкости	35
	Линии тока комбинированного вихря Ранкина	36
	Линии тока жидкости вокруг цилиндра	37
	Линии тока при движении вихревой пары	38
	Устойчивость вихревых дорожек	39
	Линии тока круговой вихревой нити.....	40
10.	1936 год. Кастерин - Обобщение уравнений аэродинамики и электродинамики	41
11.	1942 год. Прандтль - Гидроаэромеханика.....	45
	Методы исследования течения жидкости	45
	Уравнение неразрывности	46
	Уравнение Бернулли	47
	Потенциальное течение	49
	Эффект Магнуса	50
12.	1950 год. Биркгоф – Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie	52
13.	1964 год. Шлихтинг – Теория пограничного слоя.....	57
14.	1965 год. Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред	59
15.	1981 год. Шабанов, Шубин – О вихревых кольцах	66
16.	1993 год. Мелешко, Константинов – Динамика вихревых структур.....	71
	Динамика точечных вихрей в идеальной жидкости.....	71
	Статические конфигурации вихрей	75
	Осесимметричные вихревые структуры	78
17.	2001год. Ахметов – Формирование и основные параметры вихревых колец.....	81
	Постановка экспериментов	81
	Параметры вихревого кольца	82
	Зависимость структуры вихревого кольца от длины струи	84
18.	2003 год. Алексеенко – Введение в теорию концентрированных вихрей	87
	Динамика двумерных вихревых структур	87
	Экспериментальное наблюдение вихрей в аппаратах	94
19.	2003 год. Ацюковский – Общая эфиродинамика.....	99
	Краткая история теории вихревого движения	99
	Образование и структура линейного газового вихря	102
	Энергетика газовых вихрей	104
	Движение газа вокруг линейного вихря. Энергетический парадокс	108
	Образование и структура винтовых тороидальных газовых вихрей	110
20.	2005 год. Малюшевский – Явление кумуляции при взаимодействии вихревых колец... ..	111
	Литература	116

1. 1858 год. Роджерс – О формировании вращающихся колец

Изучая явление воздушных струй, Роджерс пришел к необходимости критического изучения условий, при которых получены выхлопные воздушные кольца. Используя подходящее оборудование, ему удалось не только проследить развитие колец, образующихся в выдуваемом сквозь отверстие воздухе, но и выявить аналогичное движение в тех кольцах, которые возникают, когда лопается обычный мыльный пузырь. Более того, ему удалось путем определенной изобретательности сформировать в воде и других жидкостях аналогично устроенные кольца и соотнести их с теми же механическими причинами, которые приводят к возникновению колец в воздухе.

I. О воздушных кольцах, образованных кратковременными залпами из отверстия

1. **Способ создания воздушных колец.** Чтобы в этих случаях форму и внутреннее движение вытекающего воздуха сделать четко видимым, пишет Роджерс, я использовал большой стеклянный резервуар (рисунок ниже), в котором воздух был непрозрачным благодаря постоянному производству нашатыря.



Рисунок 1-1. Стеклянный резервуар для создания окрашенных воздушных колец

К верху сосуда с помощью измельченного цемента была приклеена цинковая или стеклянная крышка с тремя отверстиями: центральным круговым диаметром в один дюйм и двумя другими значительно меньших размеров, снабженных короткими патрубками, поднимающимися над крышкой. Из двух последних отверстий одно предназначено для соединения с разрядными трубками и держится закрытым, когда используется центральное отверстие. Второе имеет тонкую стеклянную трубку, изогнутую под прямым углом и проникающую вовнутрь сосуда, не достигая двух дюймов до его дна. На своем наружном конце она соединена с гибким шлангом, через который, нагнетая воздух в нижнюю часть сосуда, экспериментатор может по своему желанию выпустить нужный объем облачного воздуха через любое отверстие. Для этого он может воспользоваться как своим ртом, так и резиновой грушей, прикрепленной к концу шланга, причем первый путь во многих случаях предпочтительнее. На равных расстояниях от центрального отверстия к нижней поверхности крышки прикреплены два крючка, с которых свешиваются два длинных отрезка толстой хлопчатой ткани. Для подготовки аппарата к

эксперименту снимается крышка и в сосуд наливается обычная соляная кислота до глубины полдюйма и к ней добавляется один или два кубических дюйма азотной кислоты. Отрезки хлопчатой ткани после погружения в сильный раствор аммония вешаются на крючки. Крышка ставится в исходное положение с легким нажимом, чтобы получить плотное соединение, не пропускающее воздуха. Воздух внутри сосуда быстро становится непрозрачным с густым облаком хлорида. Прикладывая губы к свободному концу гибкого шланга, из оставшегося незакрытым отверстия можно извлечь либо клубы, либо непрерывную струю дыма. Излишне говорить, что в процессе проведения эксперимента окружающий воздух должен быть практически неподвижным, поскольку малейшее его движение вблизи отверстия приведет к нарушению симметрии эффекта.

2. Стадии формирования кольца. Когда в результате сравнительно сильного импульса облачный воздух выходит из сосуда в виде быстрых, но не резких клубов, то каждое маленькое облачко принимает около отверстия форму кольца. Это кольцо, постепенно расширяясь при подъеме, тем не менее, сохраняет свою симметрию до тех пор, пока не достигнет высоты двух, а иногда даже трех футов над отверстием. При более мягком и менее внезапном импульсе кольцо по мере продвижения несет за собой шлейф облачного воздуха, образующий тянущееся вниз продолжение внутренней части кольца. С помощью еще более легкого выдыхания воздуха губами можно вытолкнуть его столь мягкой волной, что будет заметно, как уходящее облако медленно сворачивается от отверстия, не теряя при этом связи с основной массой — все в целом напоминает вершину колонны, украшенной волютой. В этом эксперименте кольцо не генерируется, но зато можно наблюдать зарождение такого движения и проследить за механическими движениями, создающими кольцо.

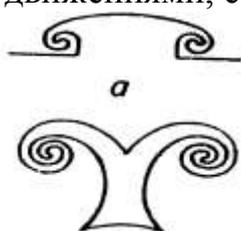


Рисунок 1-2. Поперечные сечения зародыша и полностью сформированного кольца со шлейфом

На рисунке выше показаны ранняя стадия и полностью сформированное кольцо с частью присоединенного шлейфа, причем в обоих случаях даны лишь поперечные сечения кольца. Когда залп производится импульсом более сильным, чем в первом из упомянутых случаев, результирующее кольцо устремляется вверх столь быстро, что убегает от шлейфа. Последнему остается либо медленно тянуться в виде бесформенной массы, либо, сохранив достаточную скорость, испустить из себя второе меньшее кольцо, быстро следующее за первым. Прилагая еще более энергичные усилия, можно заставить вытолкнутый воздух образовывать три, четыре и даже большее число четко сформированных колец. Размер первоначально сформировавшегося кольца зависит главным образом от ширины

отверстия и в некоторой степени от силы удара. С отверстием диаметром в полтора дюйма и большой подводящей трубкой легко с помощью подходящего импульсного выдоха генерировать совершенно симметричные кольца от двух до трех дюймов в диаметре, которые имеют энергию, достаточную для подъема без разрушения на высоту шести — семи футов. Таким способом можно сделать эти красивые явления видимыми для широкой аудитории, заставляя дымовые клубки гнаться друг за другом до тех пор, пока они не расплющатся об потолок. Если вместо рта использовать упругую грушу для выталкивания облачного воздуха, то в результате быстрого сжатия и последующего отпущения рукой образуются очень симметричные кольца, которые обычно не сопровождаются никаким шлейфом. Последний результат, очевидно, связан с внезапным расширением груши и, следовательно, с втягиванием последней части облачной массы обратно в резервуар. Продолжая сдавливать грушу так, чтобы предотвратить ее расширение, можно воспроизвести те же фазы явления, что и в случае импульса, сообщаемого выдохом.

1. Вращение и структура воздушных колец. Чтобы получить определенное представление о движении и внутренней структуре кольца, необходимо смотреть на него в почти горизонтальном направлении и в сильном проходящем свете. Это удобно сделать, поместив аппарат на столе немного ниже уровня газовой лампы, но на значительном расстоянии от нее. Тогда видно, что вращение кольца как в зарождающемся состоянии с присоединенным шлейфом, так и в уже сформированном и отделенном всегда имеет одно направление: внутренние завитки движутся вперед (при обычном способе проведения эксперимента - вверх), а наружные - в противоположном направлении (рисунок ниже).

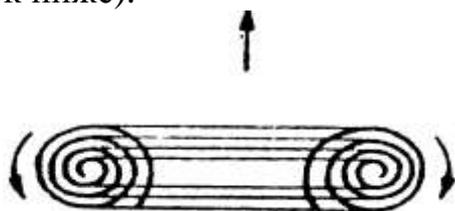


Рисунок 1-3. Направления движения кольца и вращения его витков

Чтобы глаз мог легко следить за этим движением внутри кольца, воздух внутри сосуда должен быть средней облачности, а выталкивающее усилие — быстрым, но не резким. При этих обстоятельствах видно, что кольцо состоит из витков облачного воздуха, между которыми свернута аналогичная спираль прозрачной атмосферы. Когда кольцо имеет шлейф, то легко распознать, что облачная спираль непрерывно связана с этой сопровождающей массой и спираль действительно исходит из нее вблизи внутренней окружности кольца. Еще в более ранней стадии движения удастся отметить начало такой двухслойной спирали, наблюдая, как каждый вытягиваемый из основной массы завиток захватывает порцию чистого воздуха и заключает его между своими изгибами.

4. Происхождение вращения. Оно, очевидно, связано с комбинированным воздействием внешнего импульса и сопротивления, которое испытывают края вытекающей массы со стороны ребра отверстия и со стороны воздуха, в котором эта масса движется. Внешний импульс благодаря распространяющемуся по резервуару растяжению должен до некоторой степени действовать в наружном направлении, в то время как сопротивление действует примерно противоположным образом. Поэтому в итоге будет произведен реверс или заворачивание выходящего облака вокруг отверстия, которое, поскольку воздействие продолжается, будет развиваться в описанные выше расширяющиеся завитки и, в конце концов, в совершенное и быстро вращающееся кольцо. Расширение кольца при его подъеме оказывается естественным результатом растягивающего характера импульса, воздействующего на воздух по мере его выхода из отверстия.

5. Горизонтальные полосы кольца. Изучая кольцо с четко различимыми чистыми и облачными спиралями, обнаружено появление чередующихся слоев или полос облачного и сравнительно чистого воздуха, расположенных горизонтально, которые наиболее сильно заметны вблизи вершины и основания кольца и практически исчезают в его середине. Когда применяемый воздух является лишь слегка облачным, а кольца большими и хорошо развитыми, то возникающие полосы восхитительно проявляются в мягком прошедшем свете и немало добавляют к красоте вращающегося и расширяющегося клубка. Легко видеть, что эта очевидная структура есть оптический обман, обусловленный прохождением света поочередно через облачные слои большей и меньшей толщины составного кольца. Поэтому можно заметить, что приходящие к расположенному в горизонтальной плоскости глазу лучи, прошедшие через верхнюю часть облачной спирали, будут преломлены значительно сильнее, чем те, которые прошли в параллельной плоскости непосредственно через чистое пространство. При этом первые должны пройти значительную часть пути в облачном слое, в то время, как вторые проходят немногим более чем удвоенную толщину. Такое же соотношение должно иметь место для следующих внутренних завитков, но по мере того, как витки спирали становятся тоньше, разность между толщинами чистого и облачного воздуха, через которые проходит свет, постепенно уменьшается и вблизи экватора становится неощутимой. Следовательно, полосы, столь сильно заметные вблизи вершины и основания кольца исчезают по мере приближения к его среднему сечению.

6. Об эффектах, производимых непрерывным выдувом. Слегка удлиняя импульс либо ото рта, либо от груши так, чтобы вытолкнуть сравнительно большое количество облачного вещества при средней скорости, удастся заметить частичное формирование второго кольца в распухшей части шлейфа, который все еще сопровождает первое кольцо и даже третье, хотя и более несовершенное, в шлейфе, сопровождающем

второе кольцо. Все это формирование по-прежнему образует единую массу. При непрерывном и равномерном выдуве средней силы явления бывают более любопытными. В этом случае столб воздуха, сохраняя свою гладкую цилиндрическую наружную границу только на небольшом расстоянии над отверстием, обнаруживает выше вдоль поверхности на почти одинаковых дистанциях последовательность завитков все более и более развитых по мере продвижения вверх и часто заканчивающихся на вершине почти совершенным отдельным кольцом (рисунок ниже).



Рисунок 1-4. Эффекты, возникающие при длительном непрерывном выдуве

При увеличении выдува с нарастающей скоростью эти боковые отметины на столбе становятся менее заметными и наблюдаются повсюду, переходя в пределе в ряд маленьких выступов, изгибами спускающихся вниз подобно низшему и наименее сформированному завитку в предыдущем эксперименте. Анализируя эти боковые отклонения, можно увидеть, что каждое из них образовано за счет смежных частей столба как выше, так и ниже этих завитков. Стрелки внутри, расходящиеся кверху, показывают направление, в котором внутренние части потока отклоняются, чтобы соединиться с более широкой частью спирали. Наружные стрелки, направленные вниз, обозначают относительное возвратное движение, обусловленное сопротивлением, действующим на сторонах, и показывают траекторию входящих в спираль сверху частиц. Казалось бы, эти движения должны иметь эффект, по крайней мере, внешний, состоящий в разделении колонны на чередующиеся полосы разреженного и сгущенного воздуха. При этом первые расположены примерно посередине между соответствующими витками, а вторые — непосредственно выше тех мест, где витки соединяются с основной массой. Эти регулярные чередования, фактически эквивалентные генерируемым в вытекающем потоке системам волн или колебаний, показывают аналогию в условиях для больших потоков газообразного вещества и тонких струй, в которых наличие такого колебательного движения уже указывалось и которое может иметь отношение к последнему явлению. По крайней мере, они дают убедительные доказательства того, что даже сильный поток газа, вытекаемого при постоянном давлении, не течет с непрерывной однородностью, а образует область периодических движений с равно повторяющимися интервалами.

2. 1858 год. Гельмгольц - Основы вихревой теории

В 1788 году, задолго до Гельмгольца, Лагранж опубликовал работу «Аналитическая механика», где в частном случае доказывает, что движение идеальной жидкости, которая обладает потенциалом скоростей в определенный момент времени, остается неизменным на всем протяжении движения. А несколько позднее, в 1815 году Коши нашёл интегралы гидродинамических уравнений, заключающие в себе принцип сохранения вихрей. Но Коши рассматривал полученный им результат только с аналитической стороны. Он не предвидел задач, которые могут быть решены при надлежащем геометрическом освещении выводов. Был ещё швед Свенберг, который в 1839 году доказал некоторую теорию: угловые скорости вращения частиц в разных положениях ее на траектории всегда обратно пропорциональны квадратам расстояния ее от траектории движения. Из этой теоремы можно было сделать вывод: частица жидкости, обладающая определенной угловой скоростью, не может прекратить свое вращение и, наоборот, частица жидкости не может вращаться, если в исходной точке движения ее угловая скорость была равна нулю. В работе Гельмгольца принцип сохранения вихрей описан в полной мере. Более того, он открыл правило определения скоростей движения вихревых шнуров, которые находятся в идеальной несжимаемой жидкости, и тех частей жидкой массы, в которых отсутствуют вихри. Он же указал аналогию между скоростями движения частиц жидкости и силами действия гальванических токов на магнитный полюс. Основы вихревой теории были опубликованы Гельмгольцем под названием “Zwei hydrodynamische Abhandlungen” в журнале “Crelle-Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik” в 1858 в Берлине. В русском переводе издано в Москве в 1902 году под названием “Два исследования по гидродинамике”. Рассмотрим первую часть работы под названием “Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям”, где Гельмгольц проводит математическое исследование движения частиц жидкости. Во введении Гельмгольц пишет, что до сих пор интегралы уравнений гидродинамики отыскивались почти исключительно в том предположении, что прямоугольные компоненты скорости каждой жидкой частицы могут быть приравнены к производным, взятым по соответственным направлениям от некоторой определенной функции, которую мы условимся называть потенциалом скоростей. Лагранж доказал, что это предположение допустимо во всех тех случаях, когда движение жидкой массы возникло и продолжается под действием сил, которые сами могут быть представлены как производные от потенциала сил. Но так как большинство поддающихся точному математическому определению сил природы может быть представлено в виде производных от потенциала сил, то отсюда и большая часть подлежащих математическому рассмотрению случаев движения жидкости

принадлежит именно к тем, при которых существует потенциал скоростей. Гельмгольц упомянул, что уже Эйлер обратил внимание на то, что существуют и такие случаи движения жидкости, при которых не имеет места потенциал скоростей, например, вращение жидкости около оси при одинаковой угловой скорости всех частиц. В данной работе Гельмгольц решил подвергнуть исследованию формы движения, при которых не существует потенциала скоростей. Исследование он провёл для идеальной жидкости, совершенно лишенной вязкости или, другими словами, жидкого трения. Вихревыми линиями он стал называть линии, проведённые в жидкой массе таким образом, что их направление повсюду совпадает с направлением мгновенной оси вращения лежащих на них частиц жидкости. А вихревые нити - это части жидкой массы, которые выделяются, если через все точки контура бесконечно малого элемента поверхности провести соответственные вихревые линии. Тогда для вихревых нитей можно использовать технологию математического интегрального исчисления.

Определение вращения.

В этом параграфе Гельмгольц сначала ввёл обозначения параметров исследуемой жидкости: “Пусть внутри капельной жидкости в точке, определяемой прямоугольными координатами x, y, z для времени t , давление равно p ; компоненты скорости, параллельные трем координатным осям, суть u, v, w ; компоненты внешних сил, действующих на единицу жидкой массы X, Y, Z , и плотность, изменения которой мы принимаем исчезающее малыми, равна h .” Для таких обозначений он выписал все уже известные в механике уравнения движения точек внутри жидкости:

$$(1) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

$$(1a) \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$(1b) \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

$$(1c) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Если для точки с координатами \mathfrak{r} , \mathfrak{y} и \mathfrak{z} выполнены условия (1c), то можно ввести следующие обозначения для этой точки:

$$\begin{aligned}
u = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha, \\
u = B, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \beta, \\
u = C, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma.
\end{aligned}$$

Тогда для точек, координаты которых бесконечно мало отличаются от исследуемой точки, получается:

$$\begin{aligned}
u &= A + a(x - \xi) + \gamma(y - \eta) + \beta(z - \zeta), \\
v &= B + \gamma(x - \xi) + b(y - \eta) + \alpha(z - \zeta), \\
w &= C + \beta(x - \xi) + \alpha(y - \eta) + c(z - \zeta),
\end{aligned}$$

Тогда по уравнениям (1b) можно восстановить первообразную в виде:

$$\begin{aligned}
\phi &= A(x - \xi) + B(y - \eta) + C(z - \zeta) + \\
&+ \frac{1}{2}a(x - \xi)^2 + \frac{1}{2}b(y - \eta)^2 + \frac{1}{2}c(z - \zeta)^2 + \\
&+ \alpha(y - \eta)(z - \zeta) + \beta(x - \xi)(z - \zeta) + \gamma(x - \xi)(y - \eta),
\end{aligned}$$

Надлежащим выбором направления прямоугольных координат x_1, y_1, z_1 с началом в точке (ξ, η, ζ) можно это выражение привести к другому виду:

$$\phi = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{2} b_1 y_1^2 + \frac{1}{2} c_1 z_1^2;$$

Разложенные по этим новым осям координат скорости u_1, v_1, w_1 получают значения:

$$u_1 = A_1 + a_1 x_1, \quad v_1 = B_1 + b_1 y_1, \quad w_1 = C_1 + c_1 z_1.$$

Далее делается следующий вывод: “Таким образом, если мы вообразим себе параллелепипед, ограниченный тремя плоскостями, параллельными трем упомянутым координатным плоскостям и бесконечно близкими к ним, то заключающиеся в нем жидкие частицы и по истечении элемента времени dt образуют прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны тем же координатным плоскостям. Все движения такого бесконечно малого параллелепипеда при условии (1c) слагаются, таким образом, лишь из поступательного передвижения в пространстве и из растяжения или сжатия его ребер; вращательного же движения в этом случае совершенно нет”.

Изменение, которое претерпевает бесконечно малый объем жидкости в элемент времени dt , слагается из трех различных движений: 1) перемещения жидкой частицы в пространстве; 2) растяжения или сжатия частицы по трем главным направлениям растяжения; 3) из поворота около произвольно направленной мгновенной оси вращения, причем этот поворот по известной теореме всегда можно рассматривать, как результат сложения трех поворотов около осей координат. Гельмгольц впервые решил исследовать третий случай. Поэтому он представил, что к обычным движениям бесконечно малых масс жидкости, окружающих точку (ξ, η, ζ) присоединяются ещё вращательные движения около осей, параллельных осям x, y, z и проходящих через точку (ξ, η, ζ) . Если угловые скорости этих вращательных движений соответственно равны ξ, η, ζ , то вносимые ими компоненты скорости, параллельные координатным осям x, y, z будут соответственно:

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z - \beta)\xi, & -(y - \eta)\xi; \\ -(z - \beta)\eta, & 0, & (x - \alpha)\eta; \\ (y - \eta)\zeta, & -(x - \alpha)\zeta, & 0. \end{array}$$

Скорости частицы, координаты которой x, y, z выразятся тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A + a(x - \alpha) + (\gamma + \zeta)(y - \eta) + (\beta - \eta)(z - \beta), \\ v &= B + (\gamma - \zeta)(x - \alpha) + b(y - \eta) + (\alpha + \xi)(z - \beta), \\ w &= C + (\beta + \eta)(x - \alpha) + (\alpha - \xi)(y - \eta) + c(z - \beta). \end{aligned}$$

После дифференцирования и нескольких преобразований получаем:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\zeta. \end{cases}$$

Что противоречит уравнению (1с). Следовательно, существование потенциала скоростей исключает возможность существования вращательного движения жидких частиц. Таким образом, только в том случае, когда не существует потенциала скоростей, возможны вращения жидких частиц. Поэтому вообще такие движения, можно характеризовать как вихревые.

Свойства вихревого движения

Постоянство вихревого движения. В этом параграфе математические исследования Гельмгольца привели к новым выводам:

- 1) Жидкие частицы, не находившиеся уже во вращательном движении, не придут в таковое и по истечении некоторого времени;
- 2) Всякая вихревая линия остается постоянно составленной из одних и тех же частиц жидкости и передвигается в жидкости вместе с ними;
- 3) Результирующая скорость вращения определенной жидкой частицы изменяется в таком же отношении, как расстояние этой частицы от соседних частиц, находящихся на оси вращения;
- 4) Произведение скорости вращения на поперечное сечение в части вихревой нити, состоящих из одних и тех же частиц жидкости, остаётся постоянным при передвижении нити;
- 5) Произведение скорости вращения на поперечное сечение есть величина постоянная на всей длине одной и той же нити;
- 6) Вихревая нить нигде внутри жидкости не может пресечься; она либо замыкается внутри жидкости, образуя кольцо, либо распространяется до границ её.

Интегрирование по объёму. В этом параграфе Гельмгольц исследовал влияние жидких частиц друг на друга и пришёл к следующему выводу: Каждая вращающаяся жидкая частица А вызывает в каждой другой частице В той же жидкой массы скорость, направленную перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения частицы А и частицу В. Величина этой скорости прямо пропорциональна объёму частицы А, скорости вращения её и синусу угла между прямой АВ и осью вращения, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между обеими частицами.

Совершенно такому же закону следует сила, с которой действовал бы элемент электрического тока, текущего по оси вращения частицы \underline{a} на магнитную частицу, расположенную в \underline{b} . Закон о действии элемента тока на магнитную стрелку называется законом Био-Савара.

Вихревые поверхности и энергия вихревых нитей. Здесь Гельмгольц показал, что тот компонент скорости, который направлен перпендикулярно к вихревым нитям и касается поверхности, имеет на обеих сторонах вихревой поверхности различные значения. Такая вихревая поверхность образовалась бы, например, если бы две прежде разъединённые движущиеся жидкие массы пришли в соприкосновение. Тогда на поверхности соприкосновения скорости, перпендикулярные к ней, необходимо должны сравняться, скорости же, касательные к ней, были бы вообще в обеих массах жидкости различны. Таким образом, поверхность соприкосновения получила бы свойства вихревой поверхности.

Другой вывод: энергия вихревой нити постоянна, а скорости жидких частиц убывают пропорционально кубу расстояния до оси вращения.

Свойства прямолинейных параллельных вихревых нитей

В этом параграфе Гельмгольц рассмотрел параллельные прямолинейные вихревые нити с бесконечно малым поперечным сечением в жидкой массе, распространяющейся в бесконечности во всех направлениях, перпендикулярных к нитям. Жидкость либо заполняет всё беспредельное пространство, либо ограничена двумя перпендикулярными к вихревым нитям плоскостями. Математические выкладки привели к таким следствиям:

- 1) Прямолинейные вихревые нити сохраняют постоянную скорость вращения.
- 2) Прямолинейные вихревые нити сохраняют постоянное поперечное сечение.
- 3) Центр тяжести вихревых нитей при их взаимном передвижении остается неизменным.
- 4) Движение жидких частиц, находящихся в конечном расстоянии от прямолинейной вихревой нити, зависит только от произведения угловой скорости на площадь поперечного сечения нити, а не от формы сечения.
- 5) Каждая прямолинейная вихревая нить толкает любую соседнюю параллельную прямолинейную вихревую нить, в направлении, перпендикулярном к линии, их соединяющей в соответствии с направлением собственного вращения. Расстояние между ними от этого не изменяется.
- 6) Две параллельные прямолинейные вихревые нити с одинаковым направлением скорости вращения будут вращаться вокруг их общего центра тяжести, находящегося между ними.

- a) Если произведение скорости вращения на поперечное сечение для обеих нитей одинаково по величине, то общий центр тяжести будет находиться ровно посередине между нитями.
- 7) Две параллельные прямолинейные вихревые нити с противоположным направлением скорости вращения будут вращаться вокруг их общего центра тяжести, лежащем на продолжении линии, их соединяющей.
 - a) Если произведение скорости вращения на поперечное сечение для обеих нитей одинаково по величине, то общий центр тяжести находится в бесконечности. В этом случае обе вихревые нити будут передвигаться параллельно с одинаковой скоростью в том же направлении.

Свойства кольцеобразных вихревых нитей

В этом параграфе Гельмгольц исследовал круговые вихревые нити с бесконечно малым поперечным сечением (далее вихревые кольца) в жидкой массе, простирающейся в бесконечность, плоскости которых перпендикулярны к оси z и центры лежат на этой оси, так что вокруг неё всё симметрично. Математические выкладки привели к таким следствиям:

- 1) Если существует только одно вихревое кольцо, то радиус его остаётся неизменным.
- 2) В вихревом кольце центр тяжести поперечного сечения самопроизвольно движется параллельно оси вихревого кольца с приблизительно постоянной скоростью, направленной в ту же сторону, в какую жидкость течет сквозь кольцо.
 - a) Вихревое кольцо с конечным радиусом получило бы бесконечно большую скорость передвижения.
 - b) Вихревое кольцо с бесконечным радиусом превращается в прямолинейную вихревую нить с нулевой скоростью передвижения.
 - c) Вихревое кольцо с меньшим радиусом имеет более большую скорость передвижения.
- 3) Два вихревых кольца, имеющие одну и ту же ось, будут влиять друг на друга, так как каждое, кроме собственного передвижения, следует еще движению жидких частиц, вызываемым другим вихревым кольцом.
 - a) Вихревое кольцо в процессе собственного движения расширяет радиус находящегося впереди другого вихревого кольца и замедляет, соответственно, его скорость передвижения.
 - b) Вихревое кольцо в процессе собственного движения суживает радиус находящегося позади другого вихревого кольца и ускоряет, соответственно, его скорость передвижения.
- 4) Если вихревые кольца имеют равные радиусы и движутся навстречу друг к другу, то под взаимным влиянием взаимное сближение их будет происходить всё медленнее, расширение же, напротив, будет происходить с возрастающей скоростью.
 - a) Если обе вихревые нити вполне симметричны, то для частиц, лежащих в срединной плоскости, скорость параллельная оси равна

нулю. Поэтому, не возмущая движения, мы можем вообразить здесь твёрдую стенку, и таким образом получаем случай одного вихревого кольца, направляющегося к твёрдой стенке и расплывающегося по стенке.

- 5) Если вихревые кольца в процессе собственного движения удаляются друг от друга, то под взаимным влиянием взаимное удаление их будет происходить всё быстрее, взаимное сужение же, напротив, будет происходить с уменьшающейся скоростью.
- 6) Если два вихревых кольца имеют одинаковое направление вращения, то оба передвигаются в одну и ту же сторону; движущееся впереди кольцо будет расширяться и замедлять своё движение, следующее за ним станет суживаться и передвигаться быстрее. Если скорости передвижения не слишком различны, то второе кольцо догонит первое и пройдёт сквозь него. Затем то же явление повторяется с первым, так что кольца будут поочередно проходить одно через другое. Такое явление сейчас называется чехардой колец.

3. 1867 год. Вильям Томсон Кельвин - О вихревых атомах

Математические исследования Гельмгольца натолкнули Кельвина на мысль, что вечные кольца Гельмгольца действительно могут быть в основе строения атомов. Он пишет: “Создать или разрушить вихревое движение в совершенной жидкости может только акт творческой силы”. Незадолго до этого подобное предположение было уже опубликовано в записке Ранкина “О молекулярных вихрях”, сообщенной в 1848 и в 1850 годах Королевскому обществу Эдинбурга в Великобритании. Во время доклада были представлены проволочные модели для иллюстрации вихревых атомов, разнообразие которых более, чем достаточно для объяснения разновидностей и видоизменений известных простых тел и их взаимного сродства. Кельвин заметил, что два кольцевых атома связанные каким-либо образом своими встречными концами, составляют систему. Такая система хотя и может быть изменена в форме, но никогда не может уклониться от своей особенной кратной непрерывности, так как невозможно для материи на какой-либо линии вихревого движения пройти через линию какой-либо другой материи в таком же движении или какую-либо другую часть ее собственной линии. По мнению Кельвина, вихревая теория атомов должна учитывать практические достижения новой науки – спектрального анализа, с основами которой в 1852 году его познакомил Стокс, профессор Глазговского университета. Согласно данным этой науки, каждый атом имеет один или более периодов колебаний, какие имеет струнный инструмент из одной или более струн или упругое твердое тело, состоящее из одного или более камертонов, твердо соединенных. Соответственно, абсолютное большинство атомов тоже должны состоять из комбинаций нескольких вихревых колец. В жидкостях и газах атомы непрерывно сталкиваются друг с другом. Но возможны ли, соответственно, реальные столкновения вихревых колец? Убеждение окрепло после наблюдения за опытами в лаборатории профессора Тэта: “Два кольца дыма несколько раз отскакивали косвенно друг от друга, сильно потрясаемые действием толчка. Результат был весьма подобен взаимодействию двух больших резиновых колец, ударяющихся друг о друга в воздухе. Упругость каждого кольца дыма, казалось, недалеко от того совершенства, какого можно ожидать в твердом резиновом кольце такой же формы, и из которого мы заключаем о вязкости резины”. Гельмголец открыл, что вихревое кольцо всегда движется относительно отдаленных частей жидкости в направлении, перпендикулярном к его плоскости, в сторону, в которую вращательное движение влечет внутренние части кольца. Определение скорости движения, даже приблизительное, для колец, которых радиус сечения мал сравнительно с радиусом оси круга, представило математические трудности, до сих пор не превзойденные. В кольцах дыма, действительно наблюдавшихся, она

кажется всегда несколько меньше скорости жидкости вдоль прямой оси, через центр кольца, ибо наблюдатель, стоящий в стороне от линии движения кольца, в тот момент, когда плоскость кольца проходит черед положение глаза, видит выпуклое очертание атмосферы дыма впереди кольца. Это выпуклое очертание указывает выступающую поверхность между количеством дыма, увлекаемым вперед, с кольцом в его движении и окружающим воздухом, пропускающим его. Не так легко различить соответственное выпуклое очертание позади кольца, так как неопределенный след дыма обыкновенно остается позади.

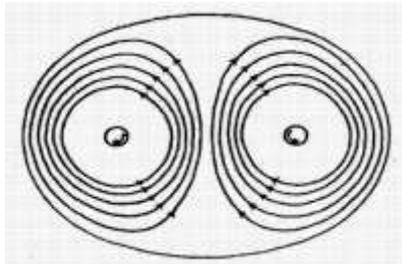


Рисунок 3-1. Вертикальный разрез вихревого кольца

Каким образом изменяется момент вращения или кинетическая энергия кольцевого вихря при столкновении? Исследование Гельмгольца доказывает, что угловая скорость ядра вихря изменяется прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально его плоскости сечения. Поэтому, чем больше диаметр кольца для того же объема и силы вихревых движений в обыкновенном кольце Гельмгольца, тем больше вся кинетическая энергия жидкости, и тем больше момент. Размеры кольца Гельмгольца определены, когда даны объем и сила вихревого движения или кинетическая энергия, или момент движения всей жидкости. Поэтому, если после некоторого числа столкновений или воздействий кольцо Гельмгольца удаляется на большое расстояние от других и становится свободным или почти свободным от колебаний, то его диаметр должен увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, получило оно или отдало энергию другим. План профессора. Эта для демонстрации колец дыма следующий. Большой прямоугольный ящик, открытый с одной стороны, имеет круглое отверстие в 6 или 8 дюймов в диаметре, вырезанное на противоположной стороне. Простой грубый ящик для упаковки в 2 куб. фута или около того вполне соответствует этой цели. Открытая сторона ящика закрыта толстым холстом или куском сукна или пластинкой резины, растянутой на ней. Удар по гибкой стороне вызывает круглое вихревое кольцо, вырывающееся из отверстия на другой стороне. Вызванные таким образом вихревые кольца видимы, если ящик наполнен дымом. Один из наиболее подходящих способов для этого представляют две реторты, вставленные горлышками в отверстия, сделанные для этой цели в одной из сторон ящика. Небольшое количество соляной кислоты вводится в одну из этих реторт, а крепкий жидкий аммоний в другую. Поднося спиртовую лампу от времени до времени к одной или другой из этих реторт, легко получить густое облако аммониевой соли внутри ящика.

4. 1887 год. Жуковский – Лекции по гидродинамике

Николай Егорович Жуковский лекции по гидродинамике читал в Московском университете. Напечатанный в 1887 году курс состоял из восьми лекций:

Лекция I - О движении частицы жидкости;

Лекция II – Исследование течения жидкости;

Лекция III – Невихревое течение несжимаемой жидкости;

Лекция IV – Электродинамические аналогии;

Лекция V – Уравнения гидродинамики и их интегралы;

Лекция VI – Об установившемся течении жидкости;

Лекция VII – Движение твёрдого тела в беспредельной массе несжимаемой жидкости;

Лекция VIII – О кажущемся взаимодействии тел, находящихся в беспредельной массе движущейся жидкости.

Хочется обратить особое внимание на последнюю лекцию. Здесь рассматривается очень интересная задача о движении в жидкости двух шаров. Точное математическое решение такой задачи описал Нейман в 1883 году в работе “Гидродинамические исследования”. Жуковский привёл приближённое решение. Получены выражения для сил, действующих на шары. В результате исследования этих выражений получено шесть выводов. Рисунки к данным выводам добавлены мной.

Вывод 1. Два шара, движущиеся равномерно по линии, соединяющей их центры, отталкиваются.

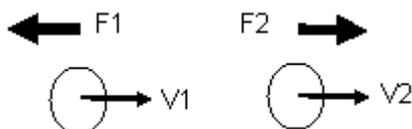


Рисунок 4-1. Отталкивание шаров, равномерно движущихся по соединяющей их линии

Вывод 2. Два шара, движущиеся перпендикулярно линии, соединяющей их центры, притягиваются.

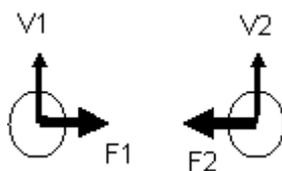


Рисунок 4-2. Притягивание шаров, движущихся перпендикулярно соединяющих их линии

Вывод 3. Шар, идущий равномерно по перпендикулярному направлению к стенке, ею отталкивается.

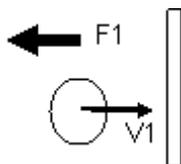


Рисунок 4-3. Отталкивание шара от стенки при равномерном движении в её сторону

Вывод 4. Шар, идущий равномерно параллельно стенке, ею притягивается.

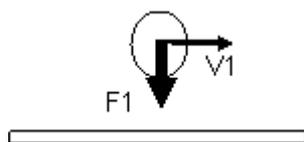


Рисунок 4-4. Притягивание шара к стенке при равномерном параллельном движении

Вывод 5. Шар, идущий по направлению радиуса от другого шара ускоренным движением, притягивает его.

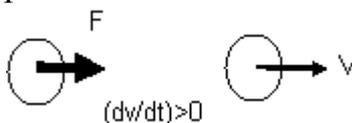


Рисунок 4-5. Притягивание шара к ускоренно убегавшему шару

Вывод 6. Шар, идущий по направлению радиуса от другого шара замедленным движением, отталкивает его.



Рисунок 4-6. Отталкивание шара от замедленно убегавшего (тормозящего) шара

Бьеркнес в 1875 году сделал подробные теоретические и опытные исследования над определением кажущегося взаимодействия пульсирующих шаров. Жуковский рассмотрел наиболее простой случай, когда центры обоих шаров неподвижны, а расстояние между шарами намного больше радиуса шаров. В результате получено два вывода.

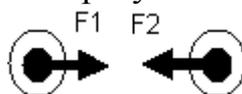


Рисунок 4-7. Притяжение пульсирующих в одинаковой фазе шаров

Вывод 7. Два одновременно пульсирующих шара притягиваются по закону Ньютона, если колеблются в одинаковых фазах.



Рисунок 4-8. Отталкивание пульсирующих в противоположных фазах шаров

Вывод 8. Два одновременно пульсирующих шара отталкиваются по закону Ньютона, если колеблются в противоположных фазах.

5. 1891 год. Жуковский - Основы теории вихрей

По мнению профессора Московского университета Жуковского, гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу. Часто бывало так, что сложные аналитические формулы освещались и представлялись в ясной наглядной форме, благодаря удачным геометрическим представлениям. Такие интерпретации охватывали задачу во всей ее полноте и раскрывали многие свойства ее, не замеченные при аналитическом исследовании. Аналогичная роль принадлежит Гельмгольцу в разъяснении вопроса о вихревом движении жидкости. Профессор Жуковский пошёл ещё дальше – к основам теории вихрей он добавил подробные рисунки. Если Гельмгольц описывал поведение теоретических объектов – бесконечно тонких вихревых нитей, то Жуковский решил показать поведение реальных вихревых объектов конечных размеров – вихревых шнуров. У Гельмгольца внутри идеальной жидкой массы, зародившиеся вихревые нити должны всегда сохраняться, и новых вихревых нитей образоваться не может. Но в природе мы часто видим зарождение и погасание вихрей. Это происходит оттого, что наши вода и воздух обладают некоторою степенью вязкости, вследствие которой теоретические результаты несколько видоизменяются. С одной стороны, вихри могут зарождаться (преимущественно в тех местах, в которых происходит скольжение друг по другу двух слоев жидкости с различными скоростями); с другой стороны, зарождавшиеся вихри не сохраняются, а постепенно потухают.

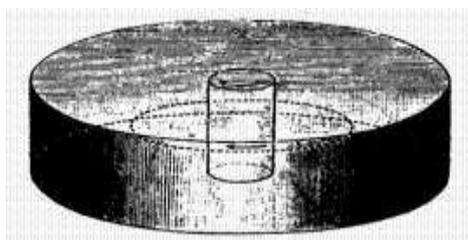


Рисунок 5-1. Графическое изображение вихря по представлениям Жуковского

Вначале Жуковский постарался наиболее просто пояснить установленное Гельмгольцем понятие о вихре. Выше изображен рисунок Жуковского, на котором цилиндрический сосуд конечной высоты с весьма большим основанием, наполненный капельной или газообразной жидкостью. Теоретически движение частиц жидкости в цилиндре можно разбить на три составляющие: *поступательное движение цилиндра в пространстве, деформация цилиндра и вращение жидкости в цилиндре*. Нас интересует только вращение. Пусть центральный цилиндрический столбик жидкости в цилиндре, некоторой толщины, вращается, как твердое тело, около своей оси. Вся остальная масса жидкости крутится около этого столбика по кругам. *Результирующая скорость каждой жидкой частицы в этих кругах обратно пропорциональна расстоянию от частицы до оси столбика*. Эти

скорости, убывая по мере приближения к центральному столбику, плавно переходят на его поверхности в скорость столбика. Такое движение жидкости и называется *вихрем*, а характеризующий его цилиндрический столбик называется *вихревым шнурком*. Произведение площади нормального (перпендикулярного) сечения центрального столбика на его угловую скорость вращения называется напряжением вихревого шнура. ***Напряжение вихревого шнура не зависит от скорости движения, а в идеальной жидкости не зависит и от времени.***

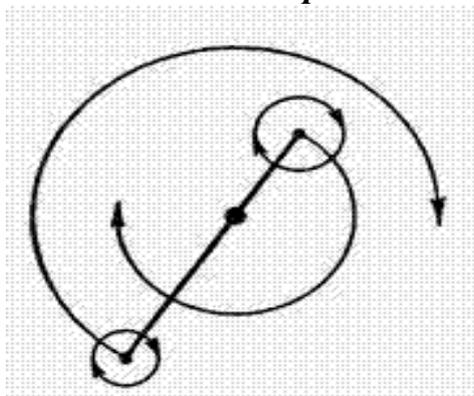


Рисунок 5-2. Взаимодействие двух вихрей, вращающихся в одну сторону

Если в рассмотренном нами весьма широком сосуде имеется только один вихрь, обусловленный прямым вихревым шнуром, то шнур будет оставаться неподвижным. Но если бы в этом сосуде образовались два такие вихря, крутящиеся около параллельных вихревых шнуров, то шнуры стали бы двигаться. На рисунке выше профессор Жуковский схематически изобразил вид сверху двух вихревых шнуров с различными напряжениями, вращающихся в одну сторону. Так как вихрь, соответствующий левому вихревому шнуру, вращает всю жидкую массу около оси шнура по часовой стрелке, то сообщает правому шнуру скорость, направленную перпендикулярно радиусу вниз, а вихрь правого шнура по той же причине сообщает левому шнуру скорость, направленную вверх. Вследствие этого происходит то, что оба шнура вращаются по часовой стрелке около некоторой точки; эта точка получится, если в центрах двух шнуров мысленно сосредоточим массы, пропорциональные напряжению соответственных вихрей, и отыщем центр тяжести этих двух масс. Центр тяжести лежит между вихрями.

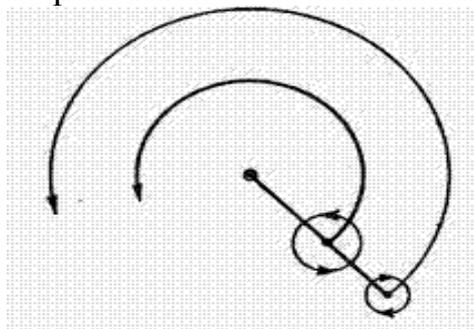


Рисунок 5-3. Взаимодействие двух неодинаковых вихрей, вращающихся в разные стороны

На рисунке выше схематически изображены сверху два вихревых шнура с различными напряжениями, вращающиеся в разные стороны. В этом случае вихревые шнуры вращаются синхронно вокруг центра, лежащего со стороны шнура большего напряжения, на продолжении линии, их соединяющей. Вращение совершается в сторону движения вихря большего напряжения.

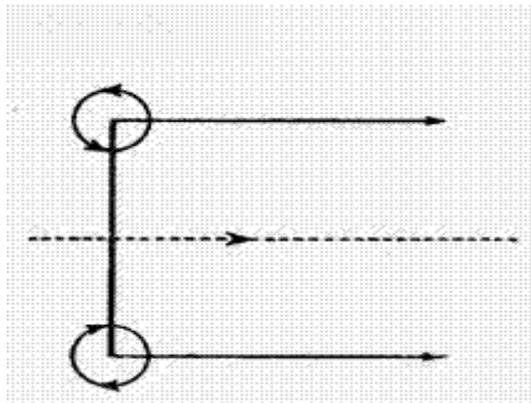


Рисунок 5-4. Взаимодействие двух одинаковых вихрей, вращающихся в разные стороны

Если бы при этом оба напряжения были равны, то этот центр удалился бы в бесконечную даль, и оба шнура бежали бы вперед по направлению, перпендикулярному прямой, соединяющей центры.

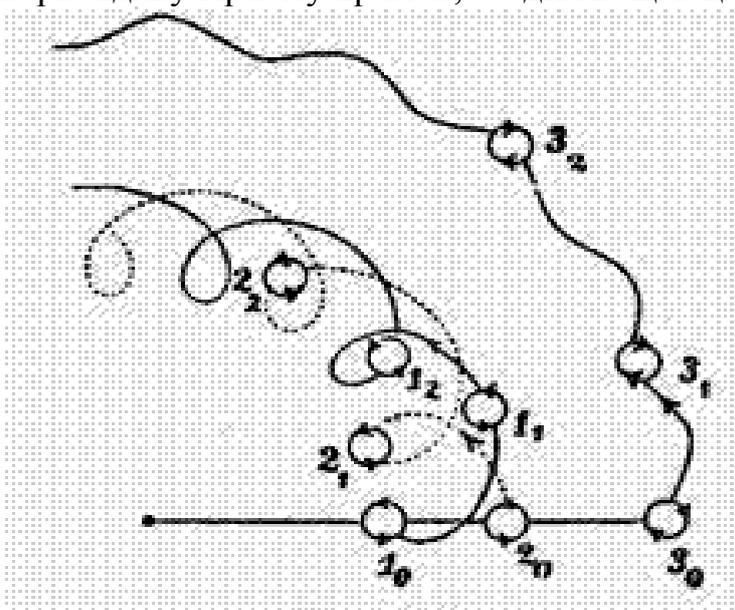


Рисунок 5-5. Пример взаимодействия трёх вихревых шнуров

Гельмгольц рассматривал взаимодействие только двух параллельных нитей. Жуковский рассмотрел более сложные случаи. На рисунке выше представлены траектории (пути) трех вихревых шнуров, из которых (1) и (2) вращаются против часовой стрелки, а (3) по часовой стрелке.

На рисунке ниже представлено движение четырех прямых параллельных вихревых шнуров, равных по напряжению. При этом шнуры (3) и (4) вращаются по часовой стрелке, а шнуры (1) и (2) — против нее.

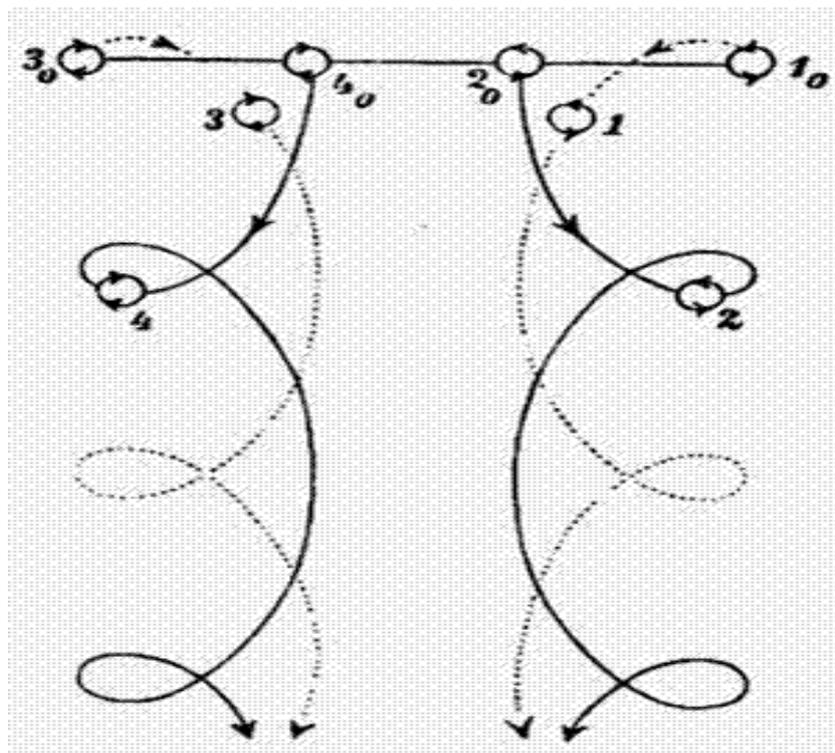


Рисунок 5-6. Пример взаимодействия четырёх вихревых шнуров

Напряжение вихря вдоль всего вихревого шнура остаётся постоянным. Поэтому вихревой шнур нигде внутри жидкости не может пресечься. Он либо оканчивается на границах жидкости, либо замыкается в вихревое кольцо. *Циркуляция скорости по какому-нибудь замкнутому контуру внутри движущейся жидкости есть произведение длины контура на среднюю из всех составляющих скоростей точек контура по направлению контура. Циркуляция скорости по любым замкнутым контурам, охватывающим шнур, равна удвоенному напряжению вихря, а циркуляция скорости по всяким замкнутым контурам, его не охватывающим, равна нулю.* Такое отличие позволяет отыскивать вихревой шнур внутри жидкости. Если рассматривается идеальная жидкость без трения, находящаяся под действием сил, удовлетворяющих закону сохранения энергии, то для нее имеет место следующая замечательная *теорема: циркуляция скорости, определенная для всякого замкнутого контура в жидкости, не изменяется с передвижением частичек жидкости, образующих контур.* Из упомянутой теоремы следует, что вихревой шнур все время движения либо будет лежать своими концами на границах жидкости (на стенках сосуда или на свободной поверхности), либо будет оставаться замкнутым. В самом деле, для того, чтобы сойти со стенок сосуда, основание вихря должно было бы уменьшиться в размерах до нуля; а так как циркуляция скорости по контуру основания должна оставаться неизменной, то схождение потребовало бы, чтобы скорость крутящейся жидкости при подошве шнура возросла до бесконечности. Гидродинамическое давление жидкости уменьшается при возрастании скорости; поэтому, при уменьшении основания вихря на стенке сосуда, будет быстро уменьшаться давление в

этом месте, и остальная масса жидкости будет надавливать на частицы конца вихревого шнура и препятствовать их схождению со стенки. Вихревой шнур, так сказать, присасывается своими концами к стенкам сосуда. Если конец шнура лежит на свободной поверхности, то подобное присасывание можно заметить по воронке, образующейся на свободной поверхности при подошве шнура.

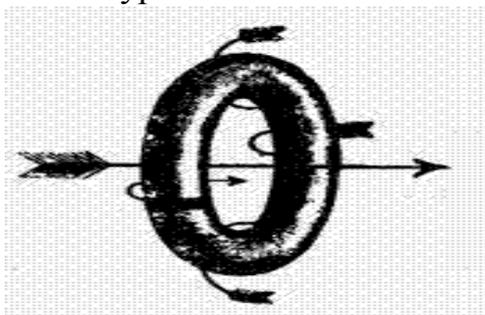


Рисунок 5-7. Схематическое изображение вихревого кольца

Если концы вихревого шнура не лежат на границах жидкости, то они должны быть между собою сомкнуты, и, таким образом, получается замкнутый вихревой шнур, такой, в котором, так сказать, оба конца присасываются друг к другу. На рисунке выше профессор Жуковский схематически изобразил вихревое кольцо. Это пример самого простого замкнутого вихревого шнура. Все частицы жидкости, лежащие вне кольца, движутся при этом по замкнутым кривым, проходящим сквозь кольцо, так что циркуляция скорости по всем этим кривым одинакова и равна циркуляции скорости на контуре перпендикулярного сечения кольца; переходя же во внутрь кольца, мы будем получать для траекторий его частичек различные циркуляции. Скорости точек жидкости самые большие на поверхности кольца. Они уменьшаются по мере удаления от этой поверхности. На некоторой осевой линии внутри кольца они равны нулю. Они уменьшаются также и по мере удаления от поверхности кольца в окружающую его массу жидкости. Для точек жидкости, значительно удаленных от кольца, скорости обратно пропорциональны кубам расстояния от кольца. Если рассмотреть любой разрез кольца плоскостью, проходящей через прямую ось симметрии, то увидим схематическое изображение, идентичное изображению на рисунке 5.4. Там два прямых параллельных шнура, около которых жидкость крутится с равными напряжениями вихря в противоположные стороны, бегут по направлению, перпендикулярному к проведенной через них плоскости. По той же причине вихревое кольцо не будет оставаться неподвижным, а будет бежать по направлению, перпендикулярному к плоскости кольца, в ту сторону, в которую жидкость вытекает из кольца. Частицы жидкой массы, движущиеся по верхним замкнутым траекториям, будут надавливать на нижний край кольца и двигать его вправо; точно также частицы жидкой массы, движущиеся по нижним замкнутым траекториям, будут надавливать на верхний край кольца и тоже двигать его вправо. Всё кольцо будет передвигаться равномерно в правую сторону, перенося за собой

крутящуюся около него жидкость. Это движение будет тем быстрее, чем больше напряжение и чем меньше размер кольца.

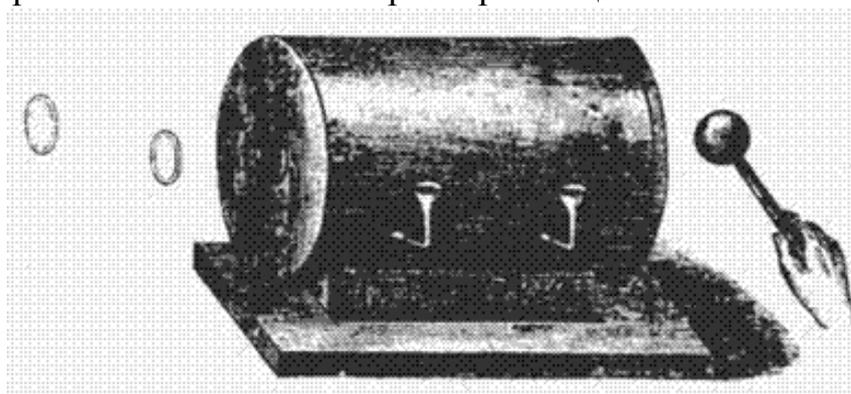


Рисунок 5-8. Прибор Тэта для производства окрашенных воздушных вихревых колец

Вихревые кольца в воздухе можно демонстрировать с помощью прибора Тэта. Он состоит из ящика, задняя сторона которого затянута кожей, а в передней стороне сделано отверстие с острыми краями. Форму отверстия можно по желанию (пользуясь вставными пластинками) делать круглой, эллиптической, четырехугольной и т. д. В ящик ставят два сосуда: в один наливают соляную кислоту, в другой — нашатырный спирт. Вследствие этого в нем образуется густой туман от подвешенных частичек хлористого аммония (нашатыря). Ударяя рукой или деревянным молотком по натянутой коже, мы быстро выталкиваем из ящика массу воздуха вместе с нашатырным туманом. Эта масса, скользя посреди окружающего неподвижного воздуха, увлекает его в вихревое движение, а сама завертывается в вихревое кольцо, которое будет хорошо заметно по наполняющему его туману. Воздух около кольца будет вращаться так, что наблюдатель, глядящий на отверстие прибора, видит массу воздуха, выбегающую к нему из середины кольца. Следя за кольцами, последовательно друг за другом выбегающими из прибора Тэта, можно усмотреть случаи взаимодействия вихревых колец - кольца либо взаимно отталкиваются (именно такой эффект поразил лорда Кельвина в лаборатории Тэта), либо проходят одно сквозь другое (чехарда колец). Свеча, стоящая на большом расстоянии от прибора, потухает всякий раз, когда пламя её задевается кольцом. Подводя к движущемуся кольцу твердые тела с боку, мы видим, что они отталкивают кольцо. Но если кольцо бежит на параллельную его плоскости неподвижную плоскость, то оно, подходя к ней, все более и более увеличивается в размерах, так сказать, растекается по плоскости. Если мы дадим кольцу набежать на нож, плоскость которого проходит через ось кольца, то последнее разрежется ножом на два полукольца, концы которых будут скользить по поверхности ножа; но, пройдя эту поверхность, концы опять сомкнутся, и кольцо восстановится.

6. 1901 год. Роберт Вуд - Вихревые кольца.

Американский физик Роберт Вуд в 1901 году опубликовал в журнале "Nature" статью о результатах экспериментов на лекциях по вихревым кольцам. Для демонстрации опытов он построил кубический деревянный ящик со стороной около метра; одна из стенок сделана из тонкой клеенки, свободно подвешенной, с двумя диагоналями из резиновых трубок, крепко привязанных по углам. Резиновые трубки нужны для того, чтобы обеспечить возвращение клеенки в первоначальное положение. Такой ящик выбрасывает воздушные вихри большой силы, причем удар кольца о стену лекционного зала отчетливо слышен и похож на звук от легкого удара полотенцем. Аудитория может получить представление о "твердости" вращающегося воздушного вихря, если последовательно выпускать невидимые кольца в зал. Удар кольца в лицо человека ощущается как мягкий толчок пуховой подушкой.

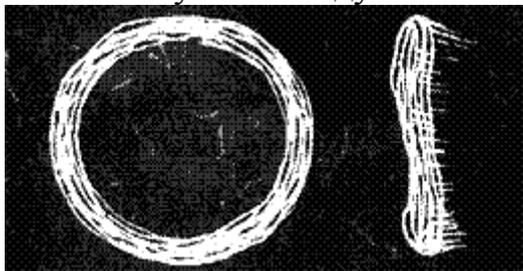


Рисунок 6-1. Фотографии больших вихревых колец

Вуд сделал фотографии больших колец. Вид сбоку представляет особый интерес: он показывает хвост (похожий на хвост кометы), который образуется из-за трения внешних участков кольца об атмосферу при движении вперед. Ударом вихревого кольца можно погасить пламя газовой горелки или сбить на пол картонный ящик. После некоторой тренировки можно научиться выпускать два кольца быстрой очередью, причем так, чтобы второе летело с несколько большей скоростью, чем первое. Тогда второе кольцо нагоняет первое, ударяется об него и отскакивает. Оба кольца остаются целыми и превращаются в вибрирующие эллипсы. Это показывает, что газовый вихрь обладает упругостью.

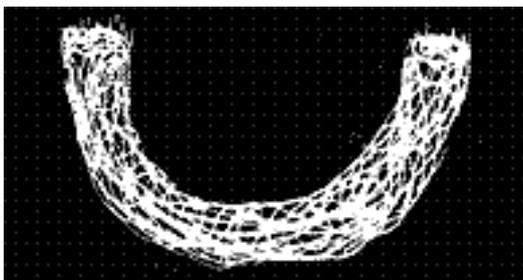


Рисунок 6-2. Вихревое кольцо, окрашенное только наполовину

Принимая некоторые меры предосторожности, можно получить дымовое полукольцо такое, как на рисунке выше. Это блестящая иллюстрация того, что образование колец никоим образом не зависит от наличия дыма. Лучший способ получить полукольца состоит в том, чтобы очень легко выдохнуть дым в бумажную трубку, позволяя ему течь по дну трубки, пока он не достигнет конца. Тогда кольцо выталкивается легким выдохом. Объясняя образование вихревых колец, вращательное движение часто приписывают трению между вытекающими воздушными струями и краем отверстия. Однако большей частью образование вихрей обуславливает трение с атмосферным воздухом. Чтобы проиллюстрировать эту точку зрения, Вуд придумал вихревой ящик, в котором трение с краем отверстия отсутствует или, правильнее сказать, компенсируется уравниванием его по всему поперечному сечению выходящей струи. В дне цилиндрического оловянного ящика просверливается приблизительно 200 отверстий. Если ящик наполнить дымом и выпустить сильную струю воздуха, от поверхности, похожей на сито, отделяется красивое вихревое кольцо. Можно просто покрыть конец бумажной трубки куском туго натянутой льняной ткани и выдуть дымовое кольцо через нее.

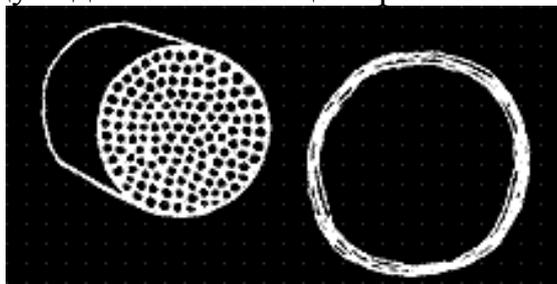


Рисунок 6-3. Формирование вихревого кольца сетчатым отверстием

При опытах с ящиком, снабженным двумя круглыми отверстиями, Вуд наблюдал слияние двух колец, двигающихся рядом, в одно большое кольцо. Если кольца имеют большую скорость вращения, они отскакивают друг от друга, но если кольца вращаются медленно, они соединяются. В момент соединения форма вихря очень неустойчива. Соединенные кольца скачком меняют горизонтальное положение на вертикальное так быстро, что это трудно заметить, а затем медленно приобретают форму кольца. То же самое можно показать с помощью двух бумажных трубок, держа их в разных углах рта и почти параллельно друг другу. В любом случае воздух в комнате должен быть практически неподвижен.

7. 1907 год. Жуковский - Заметка о движении вихревых колец

В данной заметке Жуковский рассматривает задачу о движении круглого вихревого кольца, несущего заключённую в нём жидкость поступательным движением и имеющего на поверхности вихревой слой. Решение он разбил на несколько подзадач.

Подзадача 1. Сначала он определил скорость, сообщаемую бесконечно тонким вихревым кольцом точке жидкости N, отстоящей от окружности кольца на весьма малом расстоянии (рисунок ниже). С-центр кольца, ds-бесконечно малый элемент кольца, р-расстояние от точки N до окружности, а-радиус окружности. Через точку N проходит плоскость, перпендикулярная кольцу.

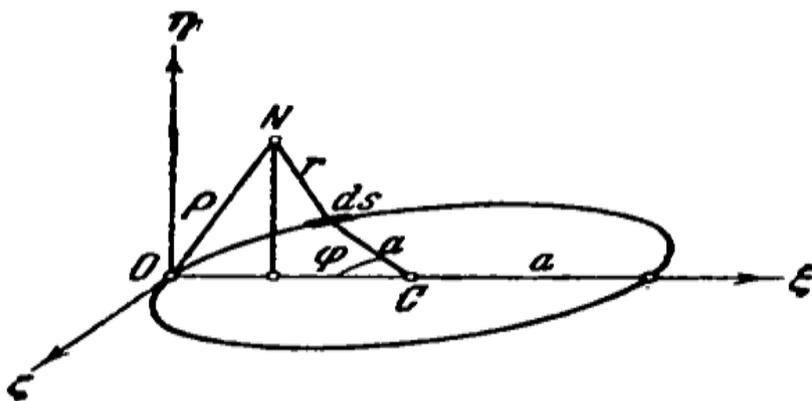


Рисунок 7-1. Расположение точки N относительно окружности кольца

Вычисления показали, что бесконечно тонкое вихревое кольцо сообщает точке N, отстоящей от него на очень близком расстоянии р, три скорости .

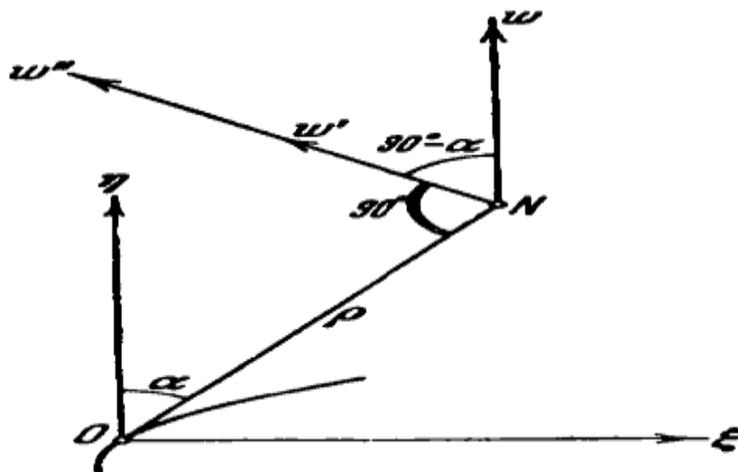


Рисунок 7-2. Скорости, сообщаемые вихревым кольцом точке N

Одна скорость направлена по оси кольца и имеет величину, зависящую только от р:

$$w = \frac{m}{2\pi a} \left(\ln \frac{8a}{\rho} - 1 \right)$$

Другая скорость вихревого вращательного движения около касательной, проведённой к кольцу в точке O, с напряжением вихря m, имеет величину:

$$w' = \frac{m}{\pi r}$$

Третья скорость вращательного движения около той же касательной, имеющей конечную переменную величину:

$$w'' = \frac{m}{2\pi a} \cdot \frac{r}{\rho}$$

Подзадача 2. Теперь бесконечно тонкие вихревые кольца расположены по поверхности тора, сечение которого имеет радиус b (рисунок ниже), так что на каждый элемент ds контура этого сечения приходится напряжение вихрей $m = \gamma ds$, нужно опять определить, какую скорость сообщают все эти кольца точке жидкости N , заключённой внутри тора. Предполагается, что b/a есть величина малая, тогда $M = 2\pi b\gamma$

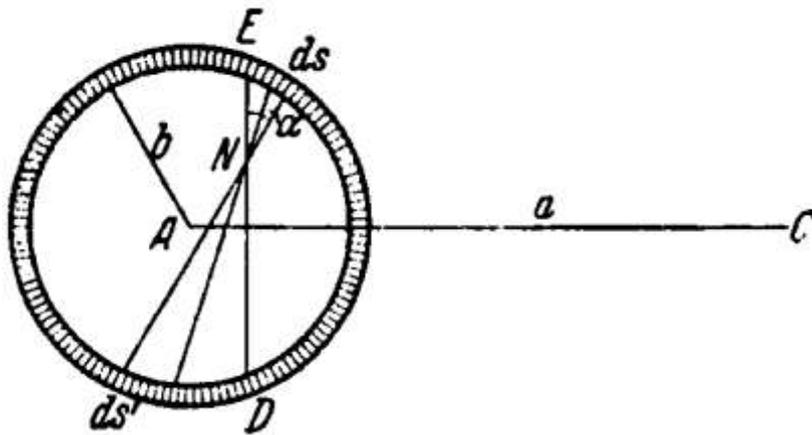


Рисунок 7-3. Сечение тора вихревого кольца

Подзадача 3. Слагая все скорости w , происходящие от всех элементарных вихревых колец, на основании формулы из первой подзадачи получим по оси вихря скорость:

$$w = \frac{M}{2\pi a} \left(\ln \frac{8a}{b} - 1 \right)$$

А для точки N получена следующая формула:

$$W = \frac{M}{2\pi a} \left[\ln \frac{8a}{b} - 1 \right] + \frac{M}{4\pi a} = \frac{M}{2\pi a} \left[\ln \left(\frac{8a}{b} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

Таким образом, всё движение тора приводится к поступательному движению заключённой в нём массы жидкости вдоль оси тора со скоростью, вычисленной данной формулой.

8. 1929 год. Титъенс - Гидроаэромеханика

Титъенс в 1929 году опубликовал курс гидроаэромеханики, созданный им на основе записей лекций профессора Геттингенского университета в Германии Людвиг Прандтля. Прандтль, как и профессор Жуковский, пытался изучать реальные вихри. У Гельмгольца изолированная вихревая нить построена так, что её угловая скорость в центре наибольшая, а по краям постепенно уменьшается до нуля. Титъенс пишет, что Прандтль пользовался другим представлением вихревой нити (как и Жуковский). При вычислениях такую вихревую нить целесообразно заменять вихревым ядром с постоянной угловой скоростью, вращающимся как твердое тело. Течение вне этого ядра полагается потенциальным.

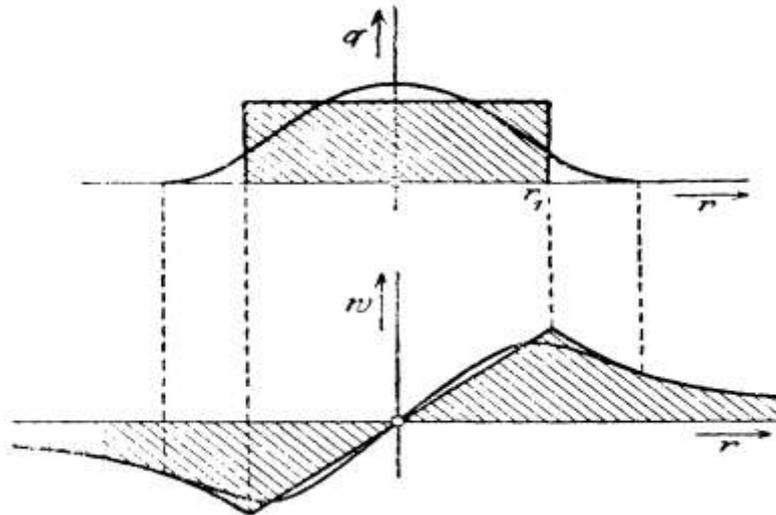


Рисунок 8-1. Графики распределения угловой и окружной скорости в вихре

На рисунке выше вверху изображен график распределения угловой скорости жидкости вихревой нити и вихревого ядра (заштрихованная область) в зависимости от расстояния от оси, где r_1 - радиус вихревого ядра в новом представлении. Ниже нарисован график распределения окружной скорости жидкости вихря в зависимости от расстояния в старом и новом представлении (заштрихованная область). Окружная скорость ядра является максимумом, она связана с угловой скоростью соотношением:

$$|\omega_1| = q \cdot r_1$$

На оси вихря окружная скорость равна нулю. Далее, по закону вращения твёрдого тела, окружная скорость повышается до максимума на границе ядра, а от границы до бесконечности убывает обратно пропорционально

расстоянию от оси:

$$|\omega| = \frac{\Gamma}{2\pi r} = q \frac{r_1^2}{r}$$

С этой скоростью будет двигаться и любой пассивный объект, находящийся в жидкости, в том числе и любой другой вихрь. Если две вихревые нити с циркуляциями Γ_1 и Γ_2 находятся на расстоянии a друг от друга, то каждый вихрь начнет двигаться под воздействием соседнего вихря с соответствующей скоростью:

$$\omega_2 = \frac{\Gamma_1}{2\pi a}; \quad \omega_1 = \frac{\Gamma_2}{2\pi a}$$

Если каждой вихревой нити приписать вес, равный её напряжению, то центром тяжести системы обеих вихревых нитей можно считать точку S , которая лежит на прямой, соединяющей центры обеих вихревых нитей и

для которой выполняется уравнение: $\Gamma_1 a_1 + \Gamma_2 a_2 = 0$.

Скорость этого центра тяжести вычисляется по формуле:

$$\omega_s = \frac{\Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

Подставляя выражения для окружных скоростей, получаем, что скорость центра тяжести равна нулю. Если у вихревых нитей одинаковое направление вращения, то вихри начнут толкать друг друга в противоположных направлениях (рисунок ниже).

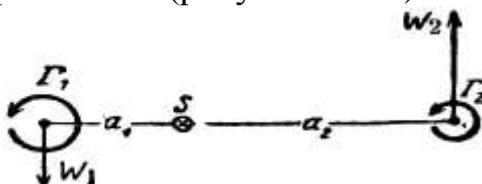


Рисунок 8-2. Взаимодействие двух вихрей с одинаковым направлением вращения

Если вихри обладают равными, но противоположными по направлению циркуляциями, то центр тяжести обоих вихрей лежит в бесконечности. Тогда такая вихревая пара движется прямолинейно в одном направлении (рисунок ниже).

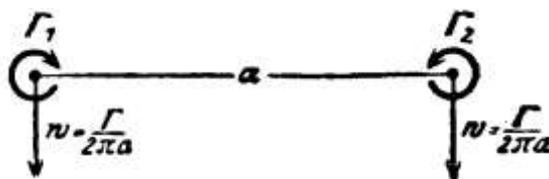


Рисунок 8-3. Взаимодействие двух одинаковых вихрей с противоположным вращением

Распределение скоростей для частиц жидкости вихревой пары, находящихся на прямой, соединяющей оси вихрей показано на рисунке ниже.

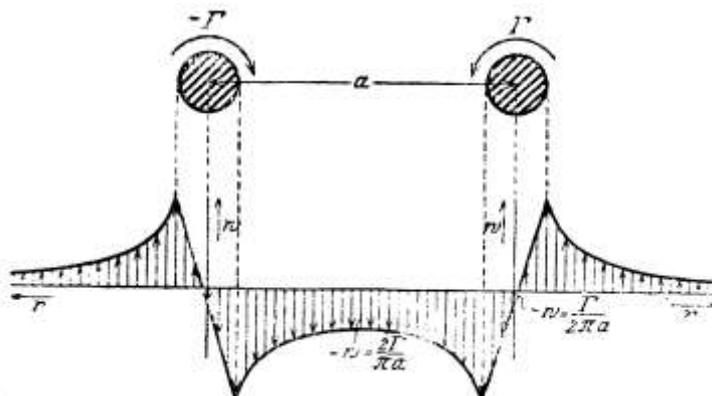


Рисунок 8-4. Распределение скоростей для частиц жидкости вихревой пары

Так как вне ядер вихревой пары течение жидкости потенциальное, то должны существовать линии с равным потенциалом и линии тока. Для нахождения таких линий было использовано комплексное представление вихря, согласно которому функция течения для прямолинейного вихря выглядит следующим образом: $F = i \ln z = \Phi + i\Psi$.

Если две параллельные вихревые нити с противоположными направлениями вращения пересекают плоскость \underline{z} в точках $\underline{z1}$ и $\underline{z2}$, то

$$\Phi + i\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Линиями равного потенциала являются кривые, для которых действительная часть постоянна. Это семейство окружностей, одновременно проходящих через точки $\underline{z1}$ и $\underline{z2}$. Линиями тока являются кривые, для которых мнимая часть постоянна. Это семейство окружностей, ортогональных к окружностям первого семейства. Вид линий для неустановившегося течения (вихревая пара обладает собственной скоростью) показан на рисунке ниже.

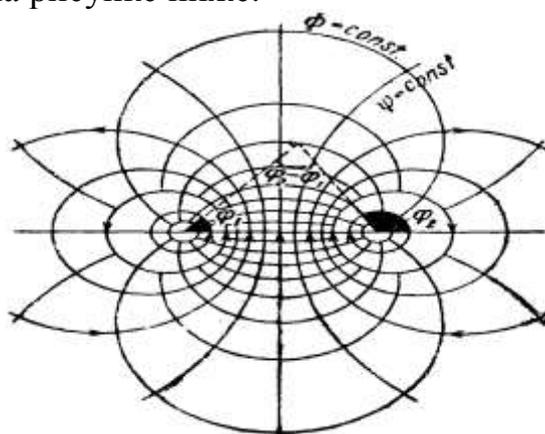


Рисунок 8-5, Линии равного потенциала и равного тока

Чтобы получить установившееся течение, следует сложить течение, обусловленное вихревой парой, с параллельным течением, обладающим скоростью, равной поступательной скорости вихревой пары с противоположным направлением. Получившийся спектр линий тока показан на следующем рисунке.

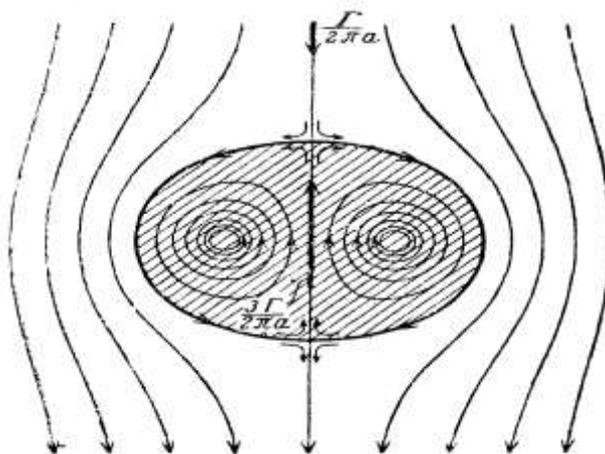


Рисунок 8-6. Линии тока установившегося течения

В бесконечности скорость равна $\Gamma/2\pi a$. В середине прямой, соединяющей оси вихрей, скорость равна $3\Gamma/2\pi a$, но направлена в противоположную сторону. Образуются два рода линий тока: замкнутые и незамкнутые. Физически это означает, что жидкость, находящаяся внутри замкнутых линий тока, увлекается вихрями. Если же считать вихревые нити покоящимися, то происходит обтекание вращающейся массы жидкости, ведущей себя в остальной жидкости подобно твёрдому телу.

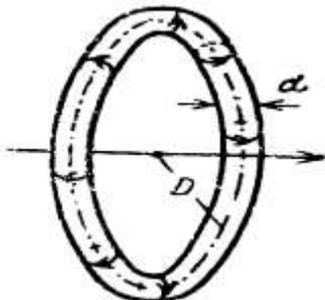


Рисунок 8-7. Графическое изображение вихревого кольца

Некоторое сходство с вихревой парой имеет вихревое кольцо (рисунок 8.7). Здесь аналогично взаимодействуют противоположные элементы кольца, приводя его в движение. Но поступательная скорость тем больше, чем меньше диаметр вихревого ядра. Если диаметр кольца обозначить через D , а диаметр ядра - через d , то вычисление даёт для поступательной скорости величину

$$\frac{\Gamma}{\pi D} \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)$$

Чтобы получить установившееся течение, следует сложить течение, обусловленное вихревым кольцом, с параллельным течением, обладающим скоростью, равной поступательной скорости вихревого кольца с противоположным направлением. Исследование показывает, что вихревое кольцо со сравнительно толстым ядром увлекает за собой массу жидкости выпуклой формы (заштрихованная область слева на рисунке ниже). В случае более тонкого ядра форма увлекаемой массы становится вогнутой по оси кольца (заштрихованная область в центре на рисунке ниже). Для вихревого кольца с очень тонким ядром увлекаемая масса жидкости сама имеет форму кольца (справа на рисунке ниже).

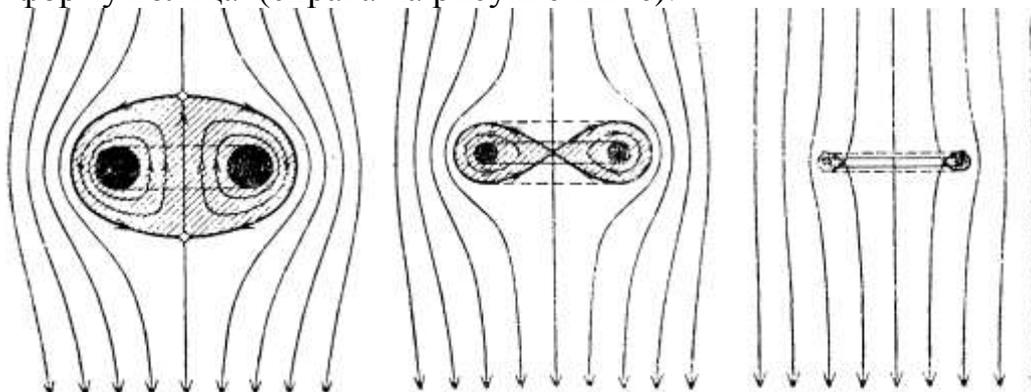


Рисунок 8-8. Увлечение жидкости вихревыми кольцами с разной толщиной ядра

Введение упрощающего предположения о вихревом ядре позволяет вычислить и распределение давления в окрестности прямолинейного вихря. Вычисления показывают, что распределение давления имеет вид, показанный внизу на рисунке ниже. На этом же рисунке сверху для сравнения показано распределение скоростей.

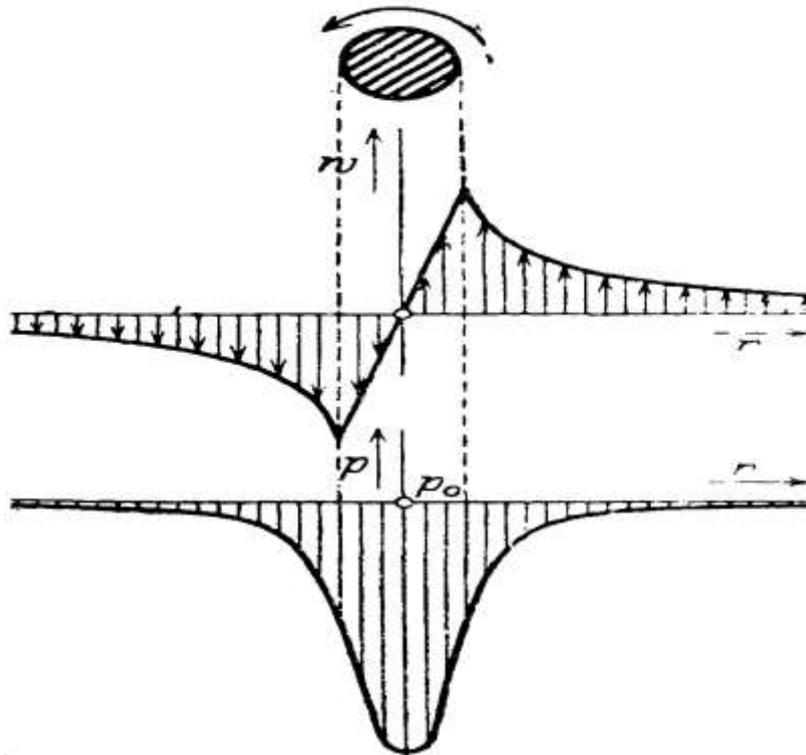


Рисунок 8-9. Распределение давления в окрестностях линейного вихря

Давление на поверхности ядра равно:

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_1^2}, \quad p_0 - \text{давление в бесконечности}$$

Для потенциального течения за пределами ядра давление обратно пропорционально квадрату расстояния до оси:

$$p = p_0 - \frac{\rho \omega^2}{2} = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2}, \quad \text{где } \omega = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

В ядре давление равно:

$$p = p_1 - \rho \int_0^r \frac{\omega^2}{r} dr = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_1^2} - \rho \int_0^r \frac{\omega^2}{r} dr = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2 (2r_1^2 - r^2)}{8\pi r_1^4} \text{ (параболоид)}.$$

Самое низкое давление в середине ядра на оси:

$$p_m = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 r_1^2}$$

9. 1932 год. Ламб - Гидродинамика

Потенциал скоростей

Ламб пишет, что в большинстве случаев, которые будут изучаться, компоненты внешних сил X, Y, Z имеют потенциал Ω , удовлетворяющий уравнениям

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Физический смысл потенциала состоит в том, что функция Ω представляет потенциальную энергию единицы массы в точке (x, y, z) сил, действующих на расстоянии. Аналогично существует обширный и важный класс случаев, когда компоненты скорости u, v, w могут быть выражены через однозначную функцию следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)'$$

Эта функция φ называется потенциалом скоростей. Ламб привел доказательство, что если в некоторый момент времени для некоторой конечной части совершенной жидкости, двигающейся под действием сил, обладающих потенциалом, существует потенциал скоростей, причем плотность жидкости постоянна или есть функция только давления, то потенциал скоростей должен существовать для указанной части жидкости для всех предшествующих и для всех последующих моментов времени. Класс случаев, в которых существует однозначный потенциал скоростей, охватывает все те движения, которые возникают из состояния покоя под действием сил рассмотренного типа. Состояние движения, для которого не существует потенциала скоростей, не может ни возникнуть, ни уничтожиться под действием импульсивных давлений или внешних сил, обладающих потенциалом. Если обозначим p -давление, ρ -плотность, то общие уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Линии тока в жидкости

Линией тока называют такую линию, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением движения жидкости.

Дифференциальные уравнения системы линий тока:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Уравнения (1) показывают, что если существует потенциал скоростей, то линии тока всюду перпендикулярны к системе поверхностей $\varphi = \text{const}$, которые называются поверхностями равного потенциала. Скорость в любом направлении равна производной с обратным знаком, взятой в этом направлении, от функции потенциал скоростей. Если поверхность равного потенциала пересекает самоё себя, то скорость жидкости для линии пересечения равна нулю. Пересечение двух разных поверхностей равного потенциала указывает на бесконечно большую скорость. Если в каждой точке скорость постоянна по величине и направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

то движение называется установившимся. При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц движущейся жидкости. **Закон изменения давления вдоль линии тока (q-скорость):**

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + \text{const.}$$

Линии тока, проведенные через бесконечно малую замкнутую кривую, образуют трубку, которая называется трубкой тока. **При установившемся движении давление для точек вдоль линии тока, при прочих равных условиях, будет наибольшим там, где скорость наименьшая. Давление будет наименьшим там, где скорость наибольшая.** Движение точки должно ускоряться, если она переходит от места с более высоким давлением к месту с более низким давлением. Существует предельная скорость, с которой жидкость вытекала бы в пустоту:

$\left(\frac{2p_0}{\rho}\right)^{1/2}$, где ρ - плотность, p_0 - давление в начальной точке ускорения. Для газа, подчинённого адиабатическому закону, предельная скорость равна $\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} c_0$, где c_0 - скорость звука в условиях начальной точки ускорения. Постоянная γ есть отношение удельных теплоёмкостей газа, равный 1,408 для атмосферы. В общем случае для скорости выполняется соотношение:

$q^2 = \frac{2}{\gamma-1} (c_0^2 - c^2)$, где c - скорость звука в условиях конечной точки ускорения. Если рассматривать установившееся движение в трубке, то в сужающейся трубке скорость течения и местная скорость звука постоянно приближаются друг к другу, в то время как в расширяющейся трубке они все более удаляются друг от друга.

Линии тока комбинированного вихря Ранкина

Пусть теперь масса жидкости равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω около направленной вверх оси z и находится только под действием силы тяжести. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} u &= -\omega y, & v &= \omega x, & w &= 0, \\ X &= 0, & Y &= 0, & Z &= -g. \end{aligned}$$

Дифференцируя и складывая первые два уравнения, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega$$

Но по условиям существования потенциала скоростей эта разность должна быть равна нулю (см. у Гельмгольца), поэтому в данном примере потенциала скоростей быть не может. Применим общие уравнения движения и получим частный случай:

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

Эти уравнения имеют общий интеграл

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const.}$$

Из чего следует, что свободная поверхность $p = \text{const}$ есть параболоид вращения около оси z , который обращён кверху вогнутостью и имеет

$$\frac{2g}{\omega^2}$$

параметр $\frac{2g}{\omega^2}$. Теперь предположим, что на некотором расстоянии от оси вращения угловая скорость начинает зависеть от расстояния (течение вне ядра у Прандтля). В этом случае

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}$$

Чтобы существовал потенциал скоростей, правая часть должна равняться нулю. Это возможно, если постоянно $\omega r^2 = \mu$, тогда в любой точке вне

ядра скорость равна $\frac{\mu}{r}$. Тогда при отсутствии внешних сил по закону изменения давления вдоль линии тока имеем

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{r^2}$$

Если действует сила тяжести, а ось z направлена вертикально вверх, то к правой части нужно добавить ещё один член $-gz$. В этом случае свободная поверхность жидкости представляет собой поверхность, образованная вращением гиперболической кривой $x^2 z = \text{const}$ вокруг оси z . Соединяя решения для ядра вихря и для течения вне ядра, получаем воронку жидкости - комбинированный вихрь Ранкина (рисунок ниже).



Рисунок 9-1. Комбинированный вихрь Ранкина

Линии тока жидкости вокруг цилиндра

Пусть теперь бесконечно длинный цилиндр радиуса a движется со скоростью \underline{U} перпендикулярно к своей оси в неограниченной жидкости, которая в бесконечности находится в покое. Возьмём начало координат на оси цилиндра, а оси \underline{x} и \underline{y} в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, ось \underline{x} совпадает с направлением скорости \underline{U} . В этом случае функции линий тока и эквипотенциальных кривых такие:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{Ua^2}{r} \cos \theta, \\ \psi &= -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$

Графическое изображение линий тока показано на рисунке ниже

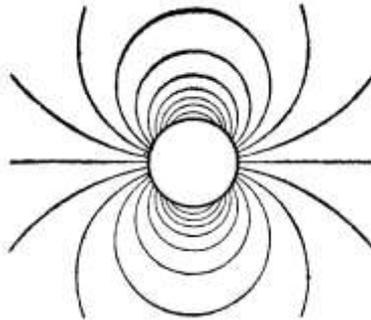


Рисунок 9-2. Линии тока равномерно движущегося цилиндра

Если сообщить жидкости и цилиндру скорость $-\underline{U}$, то получится случай обтекания потоком неподвижного цилиндра. К функциям линий тока и эквипотенциальных кривых добавляются дополнительные слагаемые:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \\ \psi &= U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$

А графическое изображение линий тока становится гораздо проще (рисунок ниже).

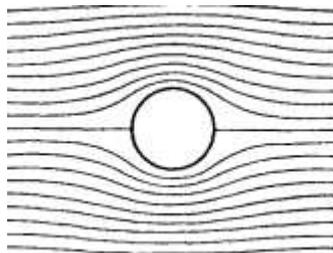


Рисунок 9-3. Линии тока жидкости при обтекании неподвижного цилиндра

Вернёмся к случаю, когда движется цилиндр в неподвижной жидкости. Предположим, что наряду с движением цилиндра существует ещё циркуляция вокруг цилиндра с циклической постоянной κ . Граничные условия будут удовлетворены, если

$$\varphi = U \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \theta.$$

Под влиянием циркуляции, наложенной на движение, вызванное цилиндром, скорость жидкости на одной стороне цилиндра увеличивается, а на другой стороне – уменьшается. Если цилиндр двигался прямолинейно с постоянной скоростью, то на одной стороне возникнет уменьшение давления, а на другой стороне произойдет увеличение давления. Тогда для поддержания первоначального движения необходимо приложить силу перпендикулярно к направлению движения (противоположная сила, отклоняющая цилиндр, называется силой Магнуса – примечание автора). На рисунке ниже показаны линии тока. На некотором малом расстоянии от начала они приближаются по виду к концентрическим кругам, так как движение, вызванное цилиндром, здесь мало в сравнении с циклическим движением. В представленном случае $U > \frac{\kappa}{2\pi a}$, поэтому точка, в которой скорость равна нулю, находится в жидкости. Изменение U приводит лишь к изменению масштаба чертежа по отношению к диаметру цилиндра.

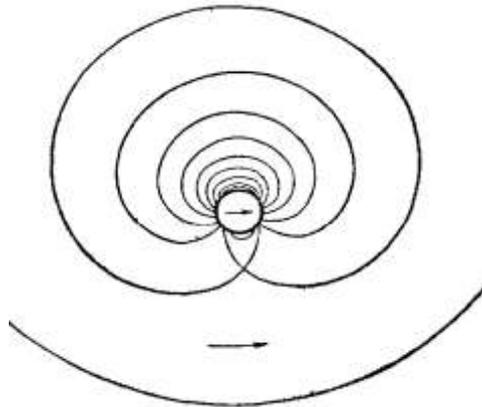


Рисунок 9-4. Линии тока равномерно движущегося вращающегося цилиндра

Линии тока при движении вихревой пары

Рассмотрим движение вихревой пары в неподвижной жидкости. Два прямолинейных параллельных вихря с противоположным направлением вращения с напряжениями $\kappa_1 = -\kappa_2$, движутся параллельно в плоскости \underline{xu} с одинаковой скоростью $V = \frac{\kappa}{4\pi a}$ на расстоянии $2a$ друг от друга в направлении оси \underline{u} . Обозначим через r_1, r_2 длины отрезков, соединяющих некоторую точку плоскости \underline{xu} с точками $(\pm a, 0)$. Чтобы найти относительные линии тока, нужно сообщить этой системе общую скорость, которая равна, но противоположна скорости вихря. Получится следующая функция:

$$\psi = \frac{\kappa_1}{2\pi} \left(\frac{x}{2a} + \ln \frac{r_1}{r_2} \right)$$

Нулевая линия функции состоит частично из оси \underline{u} и частично из овала, окружающего оба вихря. Заключённая в этом овале жидкость сопровождает вихревую пару в её движении, в то время как движение вне овала в точности совпадает с движением, которое было бы вызвано твёрдым цилиндром с таким же контуром. Полуоси овала приблизительно имеют длину $2,09 a$ и $1,73 a$.

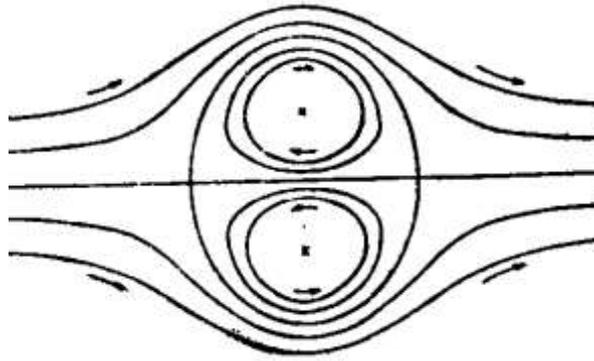


Рисунок 9-5. Линии тока жидкости при равномерном движении вихревой пары

Устойчивость вихревых дорожек

Пусть существует бесконечный ряд равноотстоящих вихрей с одинаковым вращением, с расстоянием a между вихрями, с координатами $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, $(\pm 2a, 0)$, ..., с одинаковым напряжением κ (в этом случае каждый вихрь два соседних вихря пытаются сместить, но воздействуют в противоположных направлениях). Для отдалённых точек этот ряд вихрей эквивалентен вихревому слою с равномерным напряжением $\frac{\kappa}{a}$. Расположение линий тока в этом случае показано на рисунке ниже (линии тока за пределами вихрей направлены в противоположные стороны).

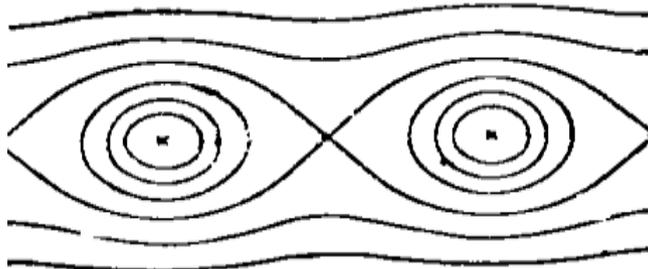


Рисунок 9-6. Линии тока в ряду равноотстоящих вихрей

Если такой ряд вихрей зеркально отразить, то возникнет подвижная система вихрей, движущаяся как целое со скоростью

$U = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}$, где b -расстояние между рядами. Вихри верхнего и нижнего ряда в таком случае будут вращаться в противоположные стороны (рисунок ниже). Средняя скорость в плоскости симметрии равна $\frac{\kappa}{a}$. Линии тока за пределами вихрей направлены в противоположную сторону и скорость их с увеличением расстояния от вихрей стремится к нулю.

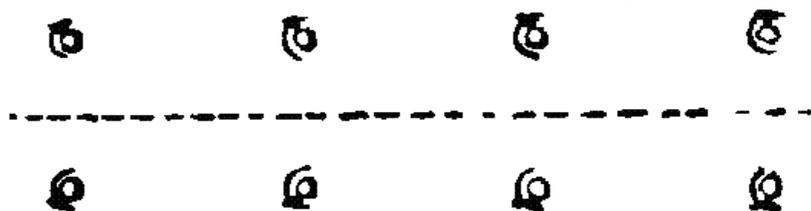


Рисунок 9-7. Система зеркальных рядов вихрей с одинаковым вращением

Если расположение изменено таким образом, что каждый вихрь одного ряда помещён против середины интервала между двумя соседними вихрями другого ряда, то средняя скорость в срединной плоскости не меняется. Изменяется общая поступательная скорость, которая становится равной $V = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}$. Устойчивость этих различных расположений вихревых дорожек в общих чертах была исследована Карманом. Ламб это сделал более подробно. Было доказано, что расположение вихрей в одном ряду является неустойчивым. Расположение двух симметричных рядов вихрей тоже неустойчиво. Расположение несимметричных рядов устойчиво только в случае, когда выполняется соотношение $\frac{b}{a} = k = 0,281$.

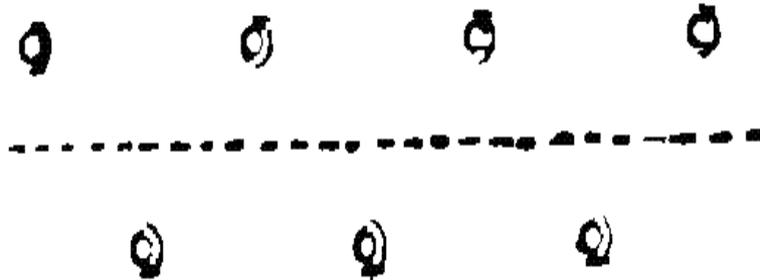


Рисунок 9-8. Система несимметричных рядов вихрей с одинаковым вращением

Линии тока круговой вихревой нити

Ламб подробно исследовал структуру вихревого кольца. На рисунке ниже показаны некоторые линии тока круговой вихревой нити, соответствующие выведенной им формуле. Здесь ось x одновременно является и осью симметрии.

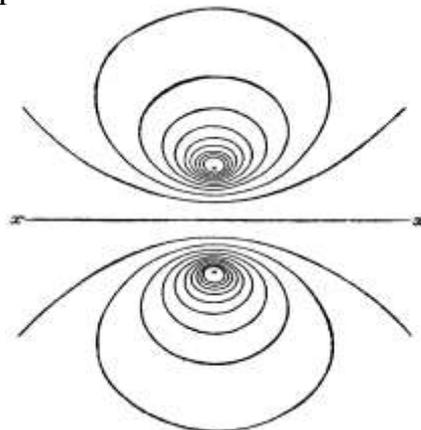


Рисунок 9-9. Линии тока круговой вихревой нити

Изолированное вихревое кольцо движется без заметного изменения формы параллельно своей прямолинейной оси с приблизительно постоянной скоростью. Эта скорость мала по сравнению со скоростью жидкости в непосредственном соседстве с круговой осью, по направлению совпадает с направлением скорости жидкости в центре кольца.

10. 1936 год. Кастерин - Обобщение уравнений аэродинамики и электродинамики

Исходная идея исследования Кастерина: вся физика и аэродинамика в том числе основаны на опытных измерениях, точность же наших измерений всегда ограничена. Поэтому теоретические отображения экспериментальных измерений всегда приближены, почти все закономерности современной физики являются только первыми приближениями. В качестве точки отсчета исследований он сделал допущение, что уравнения Эйлера для аэродинамики и Максвелла для электродинамики не точны абсолютно, а являются первыми приближениями. По словам Кастерина, поиск второго приближения велся не изменяя основ классической механики и физики. Критериями приближения в аэродинамике можно использовать отношение квадрата скорости движения газа к квадрату скорости звука в нем, а в электродинамике – отношение квадрата скорости движения электрического поля к квадрату скорости света. При первом приближении рассматривались скорости движения намного меньшие скорости звука, поэтому членами порядка v^2/c^2 пренебрегали (v -скорость движения, c -скорость звука). При изыскании вторых приближений Кастерин имел в виду, что возможны случаи скоростей движения равных или дальше больших, чем скорость звука. Поэтому второе приближение учитывает в аэродинамике члены порядка v^2/c^2 . Соответственно в электродинамике учитываются члены порядка $\frac{w^2}{c^2} = \frac{M^2}{E^2}$, где c -скорость света, M и E – напряженности магнитного и электрического полей, w -скорость движения электрического поля. В первом приближении это отношение считается очень малой величиной по сравнению с единицей и в уравнениях ею можно пренебречь или, если удерживать, то только в качестве поправочной величины. Во втором приближении это отношение может быть не только равным единице, но и быть больше. Механика Ньютона никаких ограничений скорости не знает, следовательно, во втором приближении этому отношению нужно уделять особенное внимание. При выводах уравнений Эйлера и Максвелла постулировалась непрерывность строения газа и электрического поля. Кастерин же решил учитывать экспериментальные факты прерывности. Поле признаётся прерывным. В аэродинамике прерывность устанавливается кинетической теорией. В электродинамике прерывность устанавливается существованием элементарного заряда. В качестве основного метода для решения поставленной задачи для аэродинамики он воспользовался уравнениями динамики Лангранжа, обобщёнными для физических систем Гельмгольцем. Находится кинетический потенциал $H = \Pi - K$ (разность потенциальной и кинетической энергии) и составляются уравнения Лангранжа-Гельмгольца:

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

При составлении кинетического потенциала используются всеми признаваемые свойства аэродинамического и электромагнитного полей. Полученные Кастериным уравнения для движения газа чрезвычайно мало отличаются по внешнему виду, но имеют другие частные решения. Например, в случае уравнений Эйлера для невихревого движения газа вокруг цилиндрического вихря получается парадоксальный вывод: кинетическая энергия этого невихревого движения, отнесённая к единице длины вихря, стремится к логарифмической бесконечности, плотность газа возрастает от поверхности к периферии. Судя по формулам, вихревое движение в такой форме невозможно осуществить. Однако в опыте легко получить вихревой столб между двумя параллельными плоскостями, на которые вихрь опирается своими концами. И решения Кастерина совпадают с опытом - кинетическая энергия обращающегося вокруг вихря газа конечна и убывает с увеличением расстояния от центра. В случае вихревого движения различие между уравнениями Эйлера и уравнениями Кастерина еще значительнее. На уравнениях Эйлера базируется теория вихрей Гельмгольца.

Для наглядности Кастерин применил натуральные криволинейные ортогональные координаты λ, μ, ν . Первая ось направлена по оси вихря. Третья ось направлена по направлению скорости w по нормали к оси вихря. Вторая ось направлена перпендикулярно первой и третьей осям. Скорость движения тогда представляется двумя компонентами: $u = h_1 \dot{\lambda}$ - продольная скорость по оси вихря, $\omega = h_3 \dot{\nu}$ - нормальная скорость по нормали к оси. Условие непрерывности вихря по его длине записывается в следующем виде:

$\frac{d}{d\lambda} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) = 0$, где σ_λ - площадь сечения вихря, Ω_λ - угловая скорость вихря. Откуда следует уравнение Гельмгольца - уравнение сохранения напряжения вихря.

Кастерин пишет, что при втором приближении теория вихревого движения вытекает непосредственно из уравнения Гельмгольца для кинетического потенциала и может быть получена в совершенно точном виде из исходного уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left((\Omega_\lambda \sigma_\lambda) \cdot f(\gamma_k) \right) = 0;$$

где $f(\gamma_k)$ - функция довольно сложного вида, k - адиабатный коэффициент.

Параметр функции равен: $\gamma_k = (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) \cdot \Omega_\lambda^{\left(\frac{2}{k}-1\right)}$.

Вихревые движения легко возникают и так же легко исчезают. Гельмгольц такое практическое поведение объяснял вязкостью газа. А здесь из самого исходного уравнения следует, что сохранение напряженности вихря

$\gamma = \Omega_\lambda \sigma_\lambda$ не имеет места. Исходное уравнение даёт возможность объяснить и существование долгоживущих смерчей. Если его проинтегрировать по времени, то напряжение вихря станет функцией от его угловой скорости. У этой функции имеется максимум при некотором значении угловой скорости. Вблизи этого максимума вихрь обладает наибольшей устойчивостью. Величина максимума определяется тремя физическими параметрами: адиабатным коэффициентом, скоростью звука и числом Авагадро. Для воздуха

$$\gamma_{\max} = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{см}^4}{\text{сек.}}$$

Отсюда следуют параметры наиболее устойчивого смерча: линейная скорость на периферии вихря равна скорости звука, поперечник вихря равен 10 метров, угловая скорость порядка 10 оборотов в секунду. Ещё один важный вывод во втором приближении следует из уравнения непрерывности для случая вихрей: всякий вихрь по своей длине состоит из ряда звеньев, длина каждого звена и масса его остаются во всё время движения вихря неизменными. Из выражения для γ_k ясно, что при $k=2$

$$\frac{d}{dt} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) = 0,$$

только в этом единственном случае сохраняется напряжение вихря.

Общий вывод: для всех реальных газов ($k < 2$) вихревое движение является неустойчивым, возникший вихрь не сохраняется, а исчезает. Вместе с тем, при длительном воздействии внешних сил возможно образование и существование вихревого движения. Только для некоего идеального сверхгаза ($k=2$) вихревое движение вполне устойчиво, при этом на периферии одиночного вихря скорость должна быть равна скорости звука.

Оказалось, что между уравнениями второго приближения для электродинамики и уравнениями второго приближения для аэродинамики для сверхгаза (при $k=2$) существует полный параллелизм. Для удобства сравнения мы можем опустить в уравнении электромагнитного поля постоянные величины и тогда получаем:

Уравнения вихревого поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{d}{dt} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\omega \Omega_\lambda}{c^2} \sigma_\mu \right) &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ h_1 \Omega_\lambda \cdot g(c^2) \} &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \nu} \{ h_1 \Omega_\lambda \cdot g(c^2) \} + \\ &+ \frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \Omega_\lambda}{c^2} \sigma_\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} (E \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{d}{dt} (E \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\omega E}{c_0^2} \sigma_\mu \right) &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ h_1 E \cdot g(c_0^2) \} &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \nu} \{ h_1 E \cdot g(c_0^2) \} + \\ &+ \frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega E}{c_0^2} \sigma_\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Если допустить, что для сверхгаза скорость звуковая равна скорости света, то получается, что элементарный электрический заряд пропорционален массе, распределенной на сечении элементарного вихря. При такой материализации само понятие «заряд» теряет свой прежний смысл, и его можно употреблять только как меру элементарного «потока электрической индукции». В уравнениях электродинамики скорость света величина постоянная, а в уравнениях аэродинамики скорость звука есть функция времени и координат. Только этим отличаются уравнения. Кастерин предложил и скорость света считать функцией, тогда в качестве обобщенных уравнений электромагнитного поля можно принять полностью все уравнения вихревого поля. Результирующие уравнения отличаются от уравнений Максвелла не только тем, что они не линейны, но и тем, что скорость света внутри поля переменна. Вследствие нелинейности уравнений мы обязательно приходим к решению, по крайней мере, квадратного уравнения для компонентов поля, откуда следует, что обобщенные уравнения могут дать нам вид поля только в ограниченной части пространства, так как для остального пространства компоненты будут иметь мнимые значения. Но из общего выражения для кинетического потенциала N для движения системы вихрей оказывается, что фактор g можно представить как

$$g_n(c^2) = \left(n + \beta^2 - 2 \frac{M^2}{E^2} \right)$$

Здесь n – любое целое число (но не слишком большое), положительное или отрицательное, и нуль в том числе. Тогда имеет место еще целая система дифференциальных уравнений подобного вида. В результате такая система уравнений с различными значениями g определяет электромагнитное поле во всем пространстве, занятом системой вихрей или электромагнитным полем.

Кастерин нашел два простейших частных решения для поля, создаваемого электроном. В первом решении поле имеет вид тонкого слоя (с угловой толщиной f_0) на поверхности усеченного конуса с углом $f=90^\circ-f_0$. Направление поля приблизительно определяется логарифмической спиралью на поверхности поля. Во втором решении получается поле в виде слоя на воронкообразной поверхности, начинающейся у начала координат, и поле направлено по образующим этой поверхности. Эти два решения действуют совместно, так как имеют место в разных частях пространства. Поле симметрично относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к оси вращения, то есть электрон состоит из двух симметричных половин.

11. 1942 год. Прандтль - Гидроаэромеханика

Спустя 13 лет после публикации Титъенсом его лекций, Прандтль сам опубликовал более современный вариант курса гидроаэромеханики. Отмечу некоторые интересные моменты кинематики жидкостей, изложенные здесь более подробно, чем у других авторов.

Предварительные замечания. Прандтль пишет, что движения жидкостей и движения газов имеют столько много общих свойств, что целесообразно изучать те и другие совместно. Газы обладают значительно большей сжимаемостью, чем жидкости. Но для значительного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. При небольших скоростях изменения объема газа настолько малы, что в большинстве случаев ими можно пренебрегать для упрощения расчетов. При движениях атмосферного воздуха со скоростью до 50 м/сек изменения объема не превышают 1%. Только при скорости 150 м/сек изменения объема достигают 10%. Лишь при скоростях около скорости звука изменения объема достигают большой величины и заметно влияют на характер течения. Если рассматривать течения без заметного изменения объема, то тогда слово жидкость является собирательным понятием и для жидкостей, и для газов.

Методы исследования течения жидкости

Для получения исчерпывающей картины течения, необходимо для каждой частицы жидкости знать её положение в пространстве в каждый момент времени. Если в произвольный момент времени каждой частице соответствует координатная тройка чисел (a,b,c) , а в другой момент времени координатная тройка чисел (x,y,z) , то для составления картины течения жидкости необходимо знать функции

$$\begin{cases} x = F_1(a, b, c, t), \\ y = F_2(a, b, c, t), \\ z = F_3(a, b, c, t). \end{cases}$$

Такую систему уравнений называют **уравнениями Лангранжа**. Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать ещё давление и плотность. Доведение такого метода исследования течения жидкости до конечного численного результата удаётся только в самых простых случаях. Обычно пользуются более простым методом, позволяющим указать, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. В этом случае индивидуальная судьба отдельных частиц остаётся без внимания. Пусть (u,v,w) – проекции скорости потока в точке с координатами (x,y,z) . Тогда для любого момента времени можно составить систему уравнений, называемую **уравнениями Эйлера**:

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z, t), \\ v = f_2(x, y, z, t), \\ w = f_3(x, y, z, t). \end{cases}$$

Аналогично, для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать ещё давление и плотность. Если желательно проследить траекторию какой-нибудь частности, то необходимо проинтегрировать систему из трёх дифференциальных уравнений:

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости дают так называемые линии тока, которые определяются системой уравнений:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

При установившемся течении линии тока совпадают с траекториями частиц. Если провести линии тока через все точки какого-нибудь небольшого замкнутого контура, при условии, что поле скоростей везде непрерывно, то эти линии образуют на сколь угодно большом протяжении так называемую трубку тока. Жидкость внутри неё в рассматриваемый момент времени течёт, как в трубке с твёрдыми стенками. Жидкость, текущая внутри трубки тока, называется жидкой струйкой.

Уравнение неразрывности

Если F -поперечное сечение трубки тока, ρ -плотность в этом сечении, w -средняя скорость в этом течении, то во всех поперечных сечениях одной и той же трубки тока должно соблюдаться условие $\rho F w = \text{const}$. Из этого закона сохранения массы следует, что внутри установившегося потока жидкая струйка нигде не может закончиться. Она либо должна простираться от одной границы рассматриваемого пространства до другой, либо должна быть замкнутой. Для потоков несжимаемой жидкости через все поперечные сечения за одно и тоже время проходит и одинаковый объём. Отсюда следует, что для любых несжимаемых потоков всегда имеет место уравнение $F w = \text{const}$. Тогда скорость жидкой струйки несжимаемой жидкости всегда обратно пропорциональна её поперечному сечению. В тех местах потока, где скорость больше и поперечные сечения трубок тока меньше, трубки тока расположены гуще. В тех местах потока, где скорость меньше и поперечные сечения трубок тока больше, трубки тока расположены реже. Если поток установившийся, то для его описания достаточно знать расстояние рассматриваемого сечения от какой-нибудь начальной точки. Совокупность задач, рассматриваемых с помощью такого одномерного представления потока, принято называть гидравликой. Совокупность задач, рассматриваемых с помощью двумерного или трехмерного представления потока, принято называть гидродинамикой. Совокупность задач о движении воздушных потоков называют аэродинамикой. При трехмерном рассмотрении течений математическое выражение условия сохранения массы проще всего

получить, если вычислить количества жидкости, втекающей и вытекающей в небольшой параллелепипед со сторонами dx, dy, dz и приравнять эти количества друг другу. Тогда получим **уравнение неразрывности**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Если рассматривается твердая стенка, обтекаемая жидкостью, то составляющая скорости, перпендикулярная стенке, должна быть равна нулю. На составляющую скорости, параллельную стенке, условие неразрывности не налагает никаких ограничений.

Уравнение Бернулли

В покоящейся жидкости действуют и дают уравновешенную систему два рода сил: силы разности давлений и силы тяжести (или какие-либо другие массовые силы). Эти же силы действуют и в движущейся жидкости, но здесь к ним присоединяется ещё трение жидкости, которое, которое следует рассматривать как сопротивление деформации. Многие наиболее важные жидкости (вода, воздух и др.) обладают очень малой вязкостью, поэтому трение столь мало, что пренебрежение им вполне оправдано. Поэтому обычно принято основные законы движения жидкостей выводить для идеальной жидкости, лишенной трения. Выделим в движущейся жидкости небольшой цилиндр с осью, расположенной вдоль линии тока. Если ds -высота цилиндра, dF -поперечное сечение цилиндра, тогда $\rho dF ds$ - масса цилиндра (рисунок ниже). Выше по течению на площадку dF действует давление p , а $p dF$ – действующая на площадку сила.

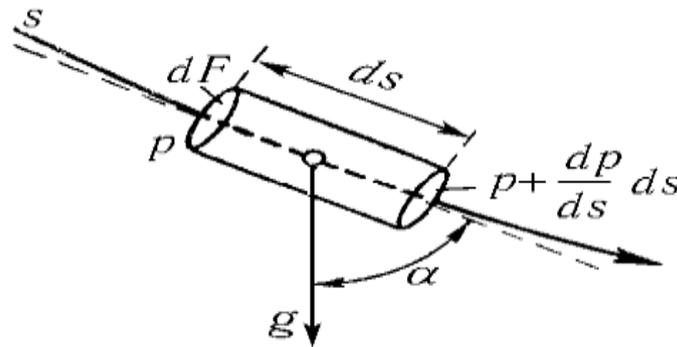


Рисунок 11-1. Часть движущейся жидкости в виде цилиндра

На основании ниже по течению с противоположной стороны цилиндра действует давление $p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$. Следовательно, вследствие разности давлений на цилиндр действует сила:

$$p dF - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dF = - \frac{\partial p}{\partial s} ds dF.$$

Если g -единичная массовая сила, то на выделенный цилиндр в направлении течения действует составляющая этой силы:

$$\rho dF ds \cdot g \cos \alpha,$$

Скорость зависит от времени и от положения частицы на линии тока. Тогда для касательного ускорения справедливо выражение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Применяя основной закон динамики (сумма сил равна массе, умноженной на ускорение), получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds dF + \rho dF ds g \cos \alpha = \rho dF ds \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \right].$$

Если всё разделить на $\rho dF ds$, то получится следующее выражение:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Если введём ось z , направленную вертикально вверх (рисунок ниже), то $\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial s}$,

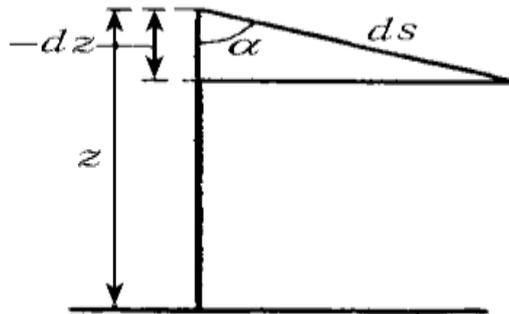


Рисунок 11-2. Угол между цилиндром и вертикалью

Тогда уравнение примет следующий вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

При установившемся течении вторая часть равна нулю, а плотность постоянная. Интегрируя вдоль линии тока, получим так называемое **уравнение Бернулли**:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const.}$$

Это уравнение является основным уравнением при одномерном рассмотрении задач. Оно выражает собой закон сохранения энергии движущейся жидкости.

Математическое дополнение. При трехмерном рассмотрении задач получаются три дифференциальных уравнения. При их выводе вместо цилиндра рассматривается маленький параллелепипед со сторонами dx, dy, dz . Если обозначить X, Y, Z – проекции массовой силы, отнесенной к единице массы, то проекции массовой силы, действующей на параллелепипед, будут равны: $X \rho dx dy dz$, $Y \rho dx dy dz$, $Z \rho dx dy dz$.

Если (u, v, w) проекции скорости на оси координат, то:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w.$$

Применяя основной закон динамики для направления x , получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}.$$

Аналогичные уравнения будут и для двух других направлений y и z . Сокращая на dx, dy, dz , получим так называемую **систему уравнений Эйлера**:

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

Потенциальное течение

Жидкими линиями и жидкими поверхностями называются такие линии и поверхности, которые всё время состоят из одних и тех же частиц жидкости. Криволинейным интегралом скорости вдоль заданной кривой между точками A и B называется интеграл от произведения линейного элемента ds кривой на составляющую скорости в направлении ds . Величина криволинейного интеграла скорости, взятого вдоль замкнутой кривой, называется циркуляцией. После таких предварительных объяснений можно сформулировать **теорему Томсона**: В однородной жидкости, лишённой трения, циркуляция вдоль замкнутой жидкой линии остаётся всё время постоянной. Из этой теоремы вытекают важные следствия. Если движение начинается из состояния покоя, то циркуляция вдоль каждой замкнутой жидкой линии заведомо равна нулю, поэтому и в дальнейшем она всё время будет равна нулю. Если в какой-нибудь области криволинейный интеграл вдоль любой замкнутой кривой равен нулю, то криволинейный интеграл, взятый от одной точки до какой-нибудь другой точки рассматриваемой области, не зависит от пути, по которому производится интегрирование. Величина Φ называется потенциалом скорости w в данной точке, если выполняется соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = w, \text{ где отрезок } \partial h \text{ перпендикулярен к поверхности } \Phi = \text{const.}$$

Наибольшее изменение потенциала происходит в направлении нормали к поверхности $\Phi = \text{const}$. Это наибольшее изменение называется градиентом потенциала Φ . Градиент представляет собой векторную величину. Так как вектор скорости перпендикулярен к поверхности $\Phi = \text{const}$, то скорость течения по величине и направлению равна градиенту потенциала Φ :

$$\mathbf{w} = \text{grad } \Phi$$

Таким образом, при всяком движении однородной жидкости без трения, возникающем из состояния покоя, существует функция, называемая потенциалом и обладающая тем свойством, что её градиент определяет скорость течения в любой точке потока. Движения жидкости, обладающие потенциалом скоростей, называются потенциальными течениями. При потенциальных течениях частицы жидкости не совершают вращения, что и является отличительным свойством таких течений. Мерой вращения частицы может служить циркуляция вдоль небольшой замкнутой кривой,

но эта циркуляция в течениях однородных жидкостей без трения, возникающих из состояния покоя, равна нулю.

Составляющие скорости связаны с потенциалом скоростей следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Если подставить эти выражения в уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

То получается **уравнение Лапласа**:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение встречается и в других областях физики. Поэтому при решении гидродинамических задач могут быть непосредственно использованы решения этого уравнения, известные из электростатики, например. Для практических приложений важно, что сумма или разность двух решений уравнения Лапласа также является решением, что непосредственно следует из линейности этого уравнения. При этом, скорости складываются по закону параллелограмма.

Поток, определяемый потенциалом скоростей $\Phi = +c/r$, называется источником. Поток, определяемый потенциалом скоростей $\Phi = -c/r$, называется стоком. Так как скорость перпендикулярна поверхности $\Phi = \text{const}$, а поверхности $\Phi = \text{const}$ представляют собой концентрические сферы, то скорость во всех точках направлена вдоль радиуса и равна:

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \mp \frac{c}{r^2}.$$

Линиями тока источника являются прямые, исходящие из начала координат. Линиями тока стока являются прямые, сходящиеся в начале координат. И в источнике и в стоке скорость в начале координат равна бесконечности. Количество жидкости, протекающее в источнике или стоке в единицу времени через сферу радиуса r , равно:

$$Q = 4\pi r^2 \cdot \frac{c}{r^2} = 4\pi c.$$

В источнике это количество возникает в центре, а в стоке - исчезает в центре. Величина Q называется мощностью источника или стока.

Эффект Магнуса

Если на вращающийся круглый цилиндр набегают поток воздуха в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра (рисунок ниже), то возникает поперечная сила, действующая на цилиндр в направлении, перпендикулярном к направлению потока. Направлена поперечная сила всегда к той стороне вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока совпадают. Вращающееся тело создаёт вокруг себя циркуляцию окружающей среды.

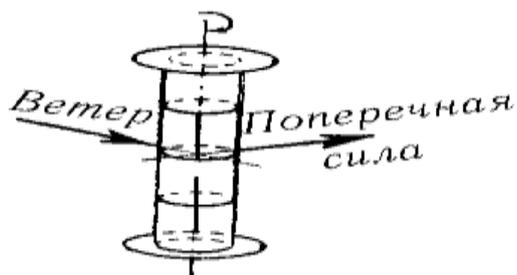


Рисунок 11-3. Иллюстрация эффекта Магнуса

Там, где скорости циркуляционного и набегающего потоков складываются, суммарная скорость увеличивается, то согласно уравнению Бернулли в этом месте давление понижается. Возникает поперечная сила, сдвигающая тело в сторону пониженного давления. Такое явление называется эффектом Магнуса по имени учёного, открывшего его в 1852 году. Такая же сила возникает и при набегающем потоке на трехгранную или четырехгранную призму, вращающуюся вокруг продольной оси, на вращающийся шар. До изобретения нарезных артиллерийских орудий существовали только гладкоствольные пушки. Магнус исследовал случаи значительных отклонений шаровых ядер от запланированных траекторий. Он показал, что причиной такого поведения ядер служило вращение вокруг поперечной оси, которое снаряд получал вследствие случайных причин. Такие же боковые отклонения, часто очень значительные, наблюдаются и при полёте срезанного мяча при игре в теннис или гольф. Эффект Магнуса можно продемонстрировать с помощью легкой рельсовой тележки с вертикальным цилиндром, приводимым во вращение электромоторчиком. Если направить на цилиндр поток воздуха поперёк рельсов, то тележка начнёт двигаться по рельсам. Если привести в быстрое вращение легкий цилиндр с горизонтальной осью и отпустить, то можно провести ещё одну демонстрацию эффекта Магнуса (рисунок выше). Вместо того, чтобы под действием силы тяжести Q упасть вертикально вниз, цилиндр начнёт планировать по пологой траектории. W – сила сопротивления воздуха, которая зависит от диаметра цилиндра, A – поперечная сила Магнуса.

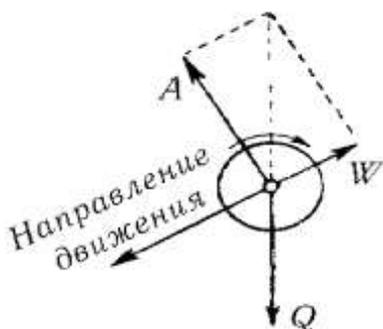


Рисунок 11-4. Другая иллюстрация эффекта Магнуса

12. 1950 год. Биркгоф – Гидродинамика. Методы. Факты.

Подобие

В данной книге Биркгоф пишет, что во многих случаях теория не соответствует практике. Целесообразные действия практиков и экспериментаторов зачастую связаны с использованием и применением ещё не осознанных и не открытых законов. Рациональная теория возникает и развивается в результате обобщения и осмысливания уже накопленного опыта, который в некоторых случаях добывается путём логической разработки существующих теорий. Теоретическое описание может отразить действительные явления только в определённых границах и в некотором приближении. Ясное представление об этих границах и об истинном соответствии между теорией и действительностью является необходимым условием для овладения теорией и для её правильного понимания. Столь же важно для понимания сущности вопроса хорошо представлять себе в каждом конкретном случае взаимодействие между теорией и экспериментом. Теоретическая гидродинамика стремится приближенно предсказать движение реальной жидкости путём решения краевых задач для соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных для идеализированных жидкостей. Математику легко убедить себя в том, что теоретическая гидродинамика в основном непогрешима. Так, Лангранж писал в 1788 году: «Мы обязаны Эйлеру первыми общими формулами для движения жидкостей... записанными в простой и ясной символике частных производных. ... Благодаря этому открытию вся механика жидкостей свелась к вопросу анализа, и будь эти уравнения интегрируемыми, можно было бы в любом случае полностью определить движение жидкости под воздействием любых сил...». Однако краевые задачи теоретической гидродинамики чрезвычайно трудны. Поэтому для облегчения решения таких задач были придуманы правдоподобные интуитивные гипотезы. Наиболее плодотворными среди них были следующие:

- (A) Определяя, какие физические переменные необходимо рассматривать, можно полагаться на интуицию;
- (B) Эффект малых воздействий мал, а эффект бесконечно малых воздействий бесконечно мал;
- (C) Симметрия воздействия обуславливает симметрию эффекта;
- (D) Топологию течения можно уловить интуитивно;
- (E) Операции анализа применимы без ограничений: функции, рассматриваемые в теоретической гидродинамике, можно свободно интегрировать, дифференцировать, представлять в виде рядов (Тейлора, Фурье) или интегралов (Лапласа, Фурье);
- (F) Математические задачи, поставленные на основе интуитивных физических представлений, считаются корректными.

Приведённые правдоподобные предположения обычно принимаются без оговорок, как сами собой разумеющиеся. Первые две главы своей

книги Биркгоф посвятил подробному исследованию их приемлемости. В ряде случаев уравнения Эйлера были проинтегрированы, но результаты расчётов резко расходились с наблюдениями, что явно противоречит мнению Лангранжа. В гидродинамике такие несомненные противоречия с экспериментальными данными называются парадоксами. Эти парадоксы были предметом многих острот. Одна из них: “гидродинамики разделялись на инженеров-гидравликов, которые наблюдали то, что нельзя объяснить, и математиков, которые объясняли то, что нельзя было наблюдать”. Сидней Гольдштейн остроумно заметил, что всю книгу Ламба можно прочитать, не представляя себе, что вода... мокрая! Существует мнение, что подобные парадоксы возникают из-за отличия идеальных жидкостей от реальных, имеющих малую, но конечную вязкость. Поэтому утверждение Лангранжа можно подправить, поставив «Навье-Стокс» вместо «Эйлер». Биркгоф полагает, что если это утверждение понимать буквально, то оно может ввести в заблуждение, поскольку явно не выделены перечисленные выше правдоподобные гипотезы и не учтён тот ущерб в строгости, который обусловлен их применением. Уравнения Навье-Стокса явно непригодны для учёта релятивистских эффектов, молекулярной структуры, квантовых эффектов, равно как таких специфических явлений, как ионизация, электростатические силы, загрязнения во взвесах, конденсация и т.п. Биркгоф не настаивает на том, чтобы впредь не использовать в теоретической гидродинамике перечисленные гипотезы. Он настаивает на том, что, прежде чем считать научно установленными заключения, основанные на правдоподобных соображениях, их надо проконтролировать либо с помощью строгих доказательств (как в чистой математике), либо с помощью эксперимента. Нужно только приветствовать открытие гидродинамических парадоксов, искренне признав неспособность существующей математики адекватно отображать сложные и удивительные явления природы. Опыт показывает, что человеческое воображение гораздо более ограничено, чем ресурсы природы. Биркгоф описал несколько десятков гидродинамических парадоксов. Рассмотрим несколько из них.

Первый такой парадокс – парадокс обратимости. Одной из фундаментальных задач гидромеханики является определение силы, действующей на твёрдое тело, находящееся в стационарном поступательном движении с постоянной скоростью в однородной покоящейся жидкости. Если твёрдое тело движется параллельно некоторой плоскости симметрии, то эту силу можно разложить на лобовое сопротивление D , подъёмную силу L и момент M , действующий в этой плоскости. Теоретически эти величины не должны меняться при противоположном направлении движения. В действительности изменение направления движущегося тела на противоположное обычно влечёт обращение величин D и L , а не оставляет их неизменными. А в случае тел, обладающих продольной симметрией, при обращении потока L остаётся неизменным, а у M изменяется знак.

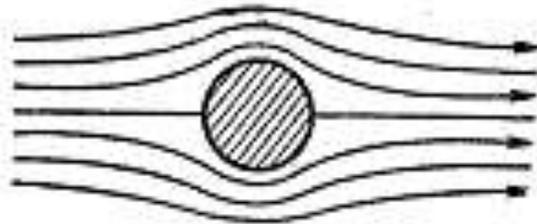


Рисунок 12-1. Иллюстрация к парадоксу Даламбера

Более известным является парадокс Даламбера. Согласно этому парадоксу в силу четырехкратной симметрии для невращающихся сферы и кругового цилиндра $D=L=0$. Вообще же парадокс Даламбера следует из принципа обратимости для любого профиля, который обладает центральной симметрией, который отображается в себя при отражении относительно неподвижного центра симметрии. Обтекание плоской пластинки, показанное на рисунке ниже, даёт пример подобного рода. Давления, действующие на элементы поверхности, соответствующие друг другу при центральной симметрии, равны по величине и противоположны по направлению.

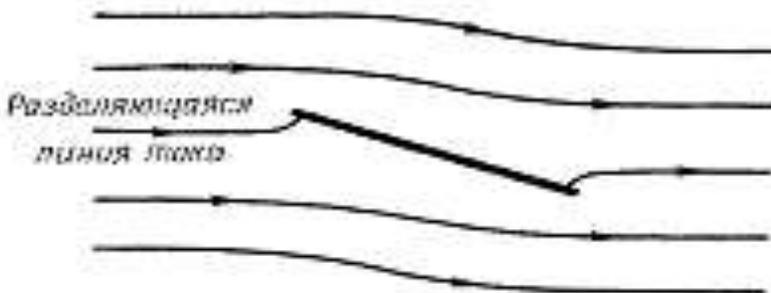


Рисунок 12-2. Обтекание плоской пластинки по Эйлеру

Стационарное локально безвихревое плоское течение с циркуляцией можно определить как течение Жуковского. При обтекании таким течением плоской пластинки возникает подъёмная сила. Жуковский считал, что основной причиной возникновения подъёмной силы является наличие у профиля передней толстой кромки и острой задней кромки. Течение Жуковского для заданного профиля с острой задней кромкой представляет собой корректно поставленную краевую задачу. Её решение в частных случаях (профиль Жуковского, профиль Кармана-Трефтца и т.д.) составляет основную главу современной теории крыла. В случае хорошо обтекаемых профилей при малом угле атаки действительные потоки хорошо аппроксимируются идеальными течениями Жуковского. Хотя полагать, что лобовое сопротивление равно нулю, очевидно сверхоптимистично, тем не менее, подъёмная сила в действительности составляет 75%-95% расчётной, а отношение подъёмной силы к лобовому сопротивлению может доходить до 50. К сожалению, экспериментальные данные не подтверждают изменения подъёмной силы с изменением формы крыла, указываемого теорией Жуковского. Парадокс теории Жуковского – теоретически коэффициент подъёмной силы должен возрасти с утолщением крыла, а в действительности он обычно убывает.

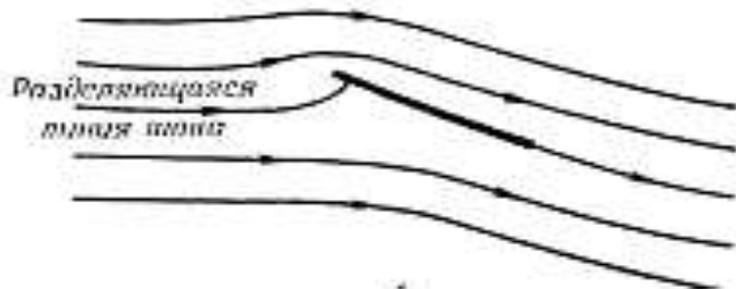


Рисунок 12-3. Обтекание плоской пластинки по Жуковскому

Игрокам в гольф и теннис известно стремление вращающегося мяча уклониться от своей траектории в направлении, в котором вращается его передняя часть. Это явление называется эффектом Магнуса. Согласно Рэлею, данный эффект обычно объясняют качественно следующим образом. Локальная скорость воздуха относительно мяча из-за его вращения больше с той стороны, где вращение направлено назад, чем там, где оно направлено вперед. Следовательно, по уравнению Бернулли, давление с одной стороны больше давления с другой стороны. Мяч уклоняется в сторону меньшего давления. На основании данного объяснения очень трудно получить количественный результат, так как не существует способа связать вращение с циркуляцией – даже в случае цилиндра. **Парадокс эффекта Магнуса заключается в том, что при малых скоростях вращения направление отклонения в действительности противоположно тому, которое даёт объяснение Рэля и которое наблюдалось Магнусом.** Этот парадокс Биркгоф пытается объяснить вмешательством ещё одного явления. Он советует учесть турбулентность пограничного слоя - явление, которое не поддаётся математическому исследованию как краевая задача.

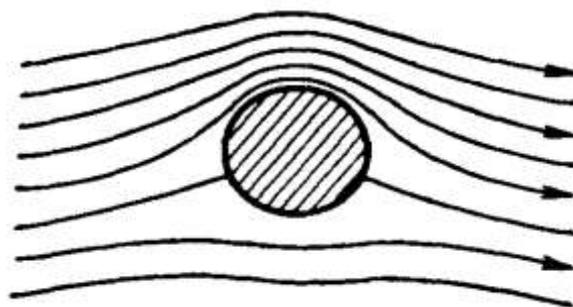


Рисунок 12-4. Иллюстрация к парадоксу Магнуса

Явление дериивации аналогично эффекту Магнуса. Артиллеристам уже более ста лет известно, что вращающиеся снаряды имеют тенденцию отклоняться от вертикальной плоскости, в которой производится стрельба. Отклонение происходит в направлении вращения снаряда. Снаряды с правым вращением отклоняются вправо от вертикальной плоскости. Снаряды с левым вращением отклоняются влево от вертикальной плоскости. **Парадокс эффекта дериивации заключается в том, что направление отклонения вращающегося снаряда уже всегда противоположно тому, которое даёт объяснение Рэля и которое**

наблюдалось Магнусом. Одно объяснение было предложено известным математиком – Пуассоном. Он считал, что вследствие инерции ось снаряда, падающего под действием силы тяжести, отстаёт от направления касательной к траектории. При стрельбе на дальние расстояния траекторией снаряда является парабола (если не учитывать потери при трении об воздух). Вследствие гироскопического эффекта снаряд стремится сохранять первоначальное направление оси вращения.

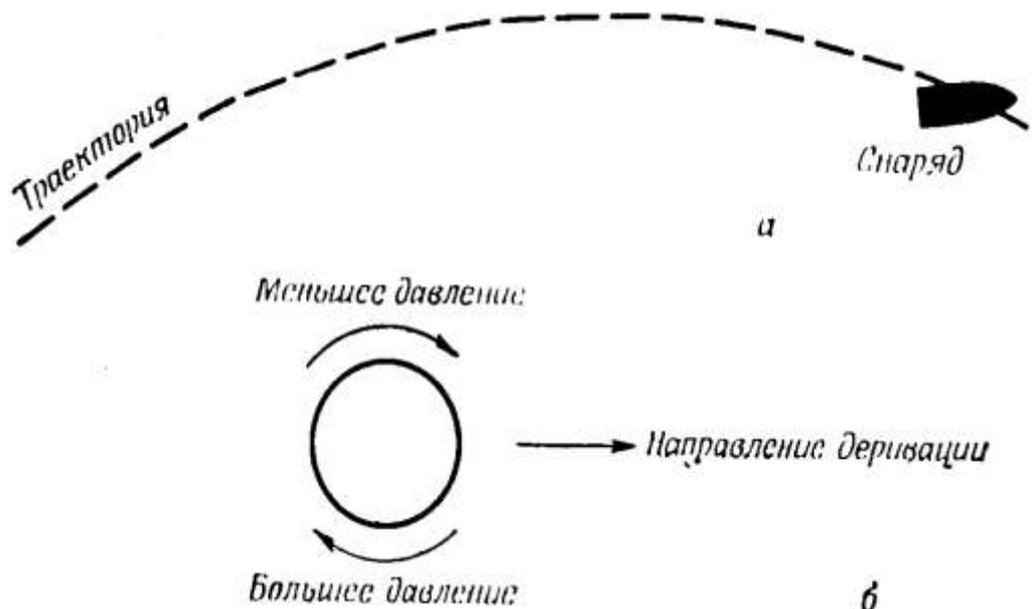


Рисунок 12-5. Иллюстрация к парадоксу эффекта деривации

Поэтому на ниспадающей ветке параболы постоянно увеличивается угол между касательной к траектории и направлением оси вращения. Снаряд падает к земле плашмя. Следовательно, на нижней стороне должно создаться большее давление, а значит и большее трение. Это должно привести к отклонению в наблюдаемом направлении. Биркгоф утверждает, что такое объяснение является ошибочным, если применить его к вращению теннисного или футбольного мяча, то получилось бы направление отклонения, противоположное обычному эффекту Магнуса. С точки зрения самого Биркгофа, устойчивое гироскопическое положение оси снаряда (или пули) с правой винтовой нарезкой находится справа от касательной к траектории, а не выше её. По его мнению, деривация вызывается главным образом непосредственно аэродинамической поперечной силой и лишь косвенно вращением.

13. 1964 год. Шлихтинг – Теория пограничного слоя

В данной работе интересно рассмотреть описание течения между двумя цилиндрами. При течении между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний покоится, возникает неустойчивое расслоение жидкости. Частицы жидкости, находящиеся вблизи внутренней стенки, вследствие большей центробежной силы стремятся переместиться наружу. Для случая невязкой жидкости устойчивость такого течения была исследована Рэйли. Выяснилось, что течение неустойчиво тогда, когда окружная скорость u при увеличении радиуса r уменьшается сильнее, чем $1/r$, то есть, если

$$u(r) = \frac{\text{const}}{r^n} \quad \text{при} \quad n > 1$$

Для случая вязкой жидкости устойчивость такого течения впервые была подробно исследована Дж. И. Тэйлором в рамках линейной теории. Это исследование показало, что, начиная с определенного числа Рейнольдса, между цилиндрами возникают правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра.

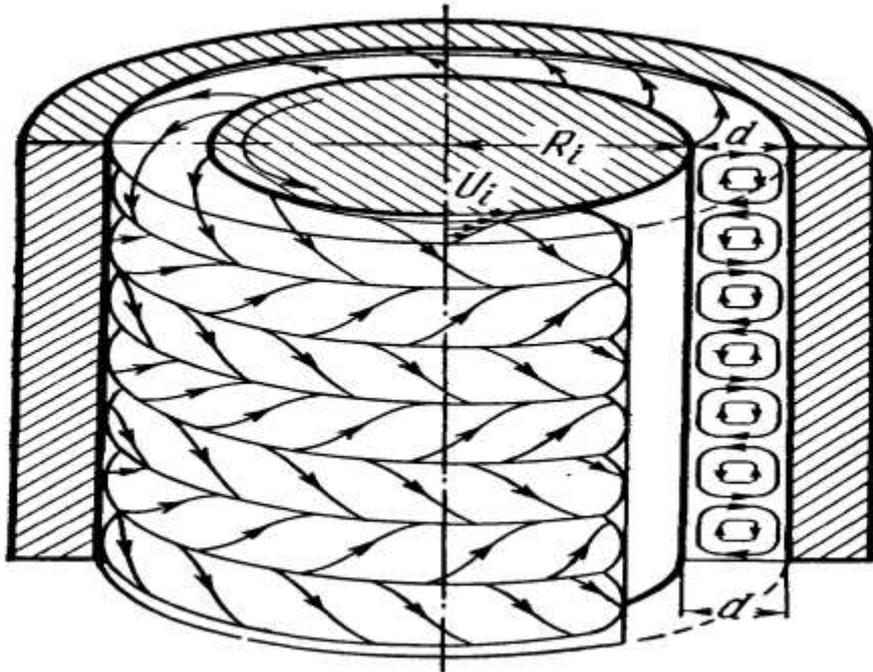


Рисунок 13-1. Вид течения между двумя цилиндрами

На рисунке выше изображена схематическая картина такого течения с ячейковыми вихрями, целиком заполняющими кольцевое пространство между обоими цилиндрами. Условие неустойчивости течения в кольцевом пространстве, следовательно, и условие возникновения вихрей можно выразить при помощи числа Тэйлора Ta , превышающего критическое значение устойчивости:

$$Ta = \frac{U_i d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_i}} \geq 41,3,$$

где d есть ширина промежутка между цилиндрами, а R_i и U_i — радиус и окружная скорость внутреннего цилиндра. Критерий Тэйлора очень хорошо совпадает с результатами измерений. Это отчетливо видно по фотоснимкам вихря Тэйлора, опубликованным Ф. Шульц-Груновым и Г. Хайном (четыре таких снимка изображены на рисунке ниже). В использованном для опытов приборе с расстоянием между цилиндрами $h = 4$ мм и радиусом внутреннего цилиндра $R_i = 21$ мм возникновение вихрей начиналось при значении числа Тэйлора, в точности совпадающем с критическим значением устойчивости. Этому числу Тэйлора соответствует число Рейнольдса $Re = 94,5$ (рисунок 13.2, а).

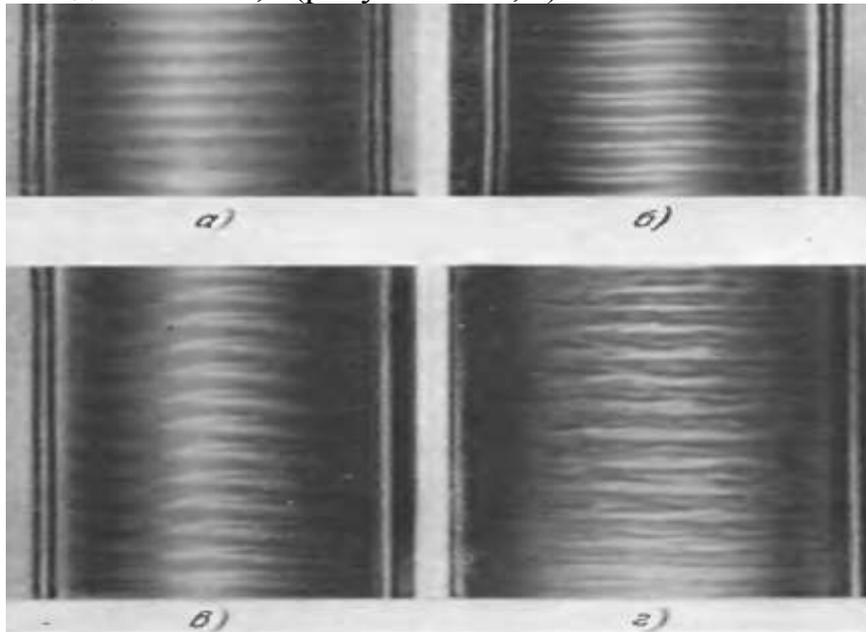


Рисунок 13-2. Фотоснимки вихрей Тэйлора

Однако на дальнейших снимках хорошо видно, что даже при значительно больших числах Рейнольдса $Re = 322$ ($Ta = 141$) и $Re=868$ ($Ta=387$) течение все еще остается ламинарным. Необходимо особо подчеркнуть, что появление первых, нейтральных вихрей при достижении предела устойчивости и последующее нарастание этих вихрей при несколько больших числах Тэйлора отнюдь не означает, что течение уже стало турбулентным. Напротив, оно по-прежнему остается упорядоченным и ламинарным. Только при $Re = 3960$ ($Ta = 1715$) развивается отчетливо выраженная турбулентность (рис. 13.2, г).

Дж. Т. Стюарт выполнил расчет неустойчивого ламинарного течения с вихрями Тэйлора с учетом нелинейных членов в уравнениях движения. Этот расчет показал, что существует равновесие между переносом энергии из основного течения во вторичное течение и диссипацией энергии во вторичном течении вследствие трения. Перенос энергии из основного течения во вторичное течение приводит к сильному увеличению момента сопротивления внутреннего цилиндра.

14. 1965 год. Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред

Основное свойство, которое отличает жидкость от твёрдого тела, заключается в том, что жидкость не способна сдерживать даже на мгновение напряжение сдвига. Если к жидкости приложить напряжение сдвига, то она начинает двигаться. Густые жидкости, подобные мёду, движутся менее легко, чем жидкости типа воды или воздуха. Мерой лёгкости, с которой жидкость течёт, является её вязкость. В данной книге особенности гидродинамической среды описаны в двух главах. В главе 40 описывается поведение так называемой «сухой» воды, которая считается несжимаемой и в которой эффектом вязкости можно пренебречь. В главе 41 описаны свойства «мокрой» воды, когда нужно обязательно учитывать упомянутые выше эффекты. При игнорировании сжатия и вязкости математическое описание жидкости упрощается. Ещё проще описать неподвижную жидкость, которую изучает гидростатика. Если жидкость находится в покое, то на неё не действуют никакие сдвиговые силы. Напряжения внутри такой жидкости всегда нормальны к любой её поверхности. Нормальная сила на единичную площадь называется давлением. Так как в жидкости нет никаких сдвигов, поэтому давление и во всех других направлениях одинаково. Если плотность изменяется в пространстве каким-то произвольным образом, то уравнение гидростатики в общем случае не имеет решения. И только когда плотность постоянна, решение уравнения имеет простой вид, связывая давление и плотность с потенциальной энергией единицы массы.

$$p + \rho\varphi = \text{const}$$

Эффекты вязкости появляются в текущей жидкости. До 1900 года основные усилия теоретиков были направлены на изучения свойств идеальных несжимаемых жидкостей без вязкости, которые ничего общего с реальными жидкостями не имели. Именно поэтому теоретиков, которые занимались подобными веществами, Джон фон Нейман называл людьми, изучающими «сухую» воду. Если скорость потока гораздо меньше скорости звука, то обычно пренебрегают изменением давления и плотности однородной жидкости. Если такая текущая жидкость первоначально не вращалась, то не будет вращаться и в любой другой момент времени. Проще всего описать стационарный поток, в котором производная скорости по времени в каждой конкретной точке равна нулю. В таком потоке скорость в любом месте жидкости никогда не изменяется. Жидкость в любой точке постоянно заменяется новой жидкостью, движущейся точно таким же образом. Стационарность потока вовсе не означает, что ничего не происходит – частички жидкости движутся и изменяют свои скорости, все перемещения направлены вдоль линий тока.

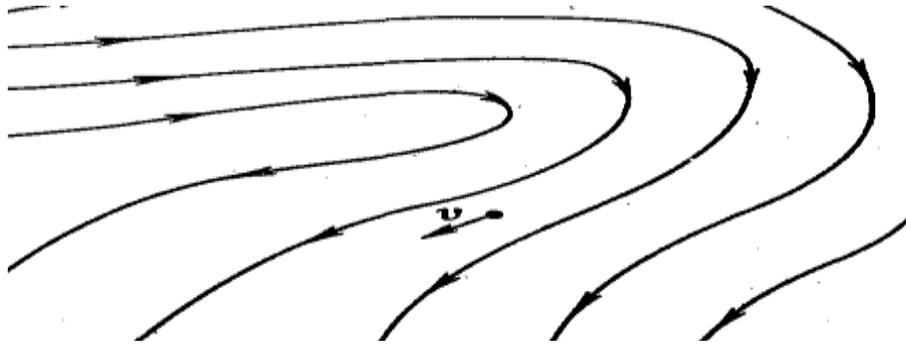


Рисунок 14-1. Течение жидкости произвольной формы

Движение стационарного потока описывается уравнением Бернулли, которое связывает давление, плотность, скорость потока и потенциальную энергию единицы массы.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi = \text{const.}$$

Легко представить пучок линий тока, образующих трубку тока. В таком случае жидкость будет двигаться только внутри трубки, не пересекая её стенок. Площадь сечения отрезка трубки на одном конце A_1 , на другом конце – A_2 . Скорости жидкости на одном конце v_1 , на другом – v_2 . Через одинаковый интервал времени жидкость на каждом конце передвинется на разное расстояние, но изменение масс должно быть одинаково:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

Откуда следует, что:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2.$$

То есть, при постоянной плотности скорость потока изменяется обратно пропорционально площади сечения потока.

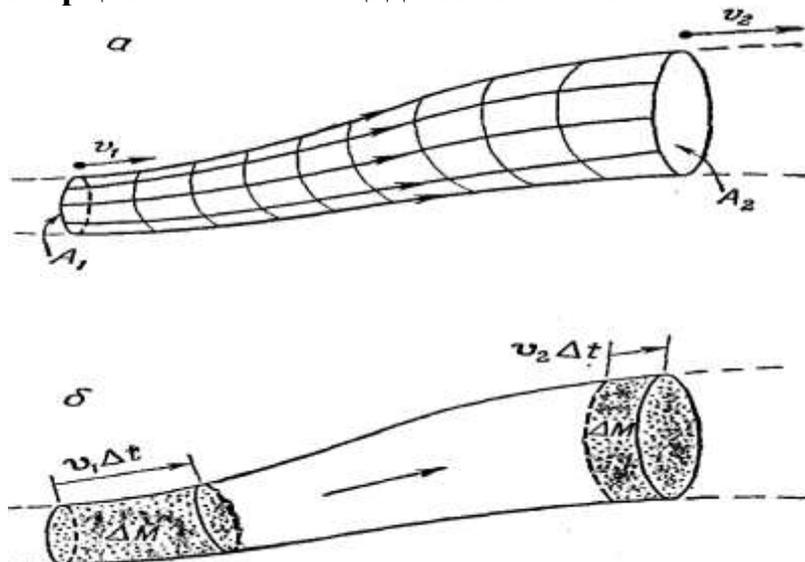


Рисунок 14-2. Пучок линий тока в виде трубки

Если плотность и гравитационный потенциал неизменны, то из формулы Бернулли следует, что при увеличении скорости должно падать давление. Этот эффект легко продемонстрировать на опыте. Нужно поток

пропустить через трубу с переменным сечением, измеряя давление в разных местах с различным сечением с помощью столбика воды, сообщающегося с потоком через достаточно малые отверстия, не возмущающие потока (рисунок ниже).

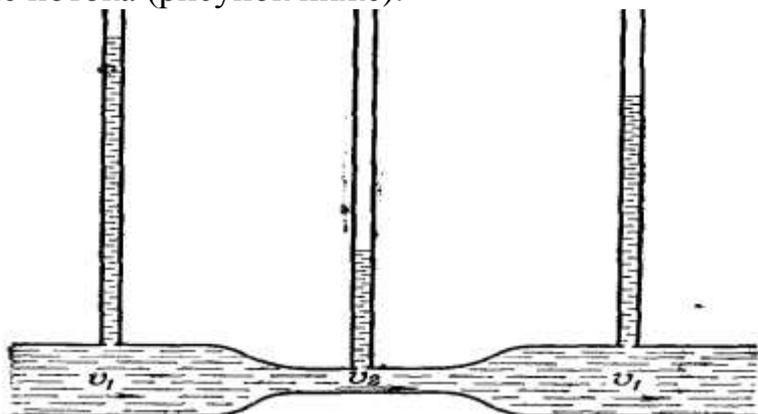


Рисунок 14-3. Измерение давления в трубах переменного сечения

Давление измеряется высотой вертикального столбика воды. В узких местах столбик ниже, в широких местах столбик выше. Поток ускоряется, переходя из широкой части в узкую часть. Наоборот, при переходе из узкой части в широкую часть, поток замедляется. Формула Бернулли предсказывает, что давление до сужения должно быть тем же, что и после него. Однако на самом деле оно заметно меньше. Ошибка предсказания кроется в том, что формула не учитывает трения, вязкой силы, вызывающей падение давления вдоль трубы.

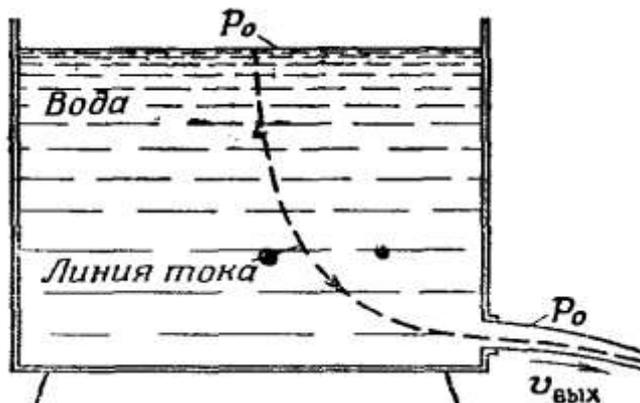


Рисунок 14-4. Принцип измерения скорости течения в выводном шланге

Пусть теперь из отверстия вблизи дна резервуара вытекает струя воды (рисунок выше). Давление на поверхности и в струе одинаково. В верхней части резервуара скорость потока и гравитационный потенциал равны нулю. Если h - высота резервуара, то тогда уравнение Бернулли примет следующий вид:

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{вых}}^2 - \rho gh, \text{ откуда следует } v_{\text{вых}} = \sqrt{2gh}.$$

Скорость получилась в точности равной скорости предмета, падающего с высоты h . Однако нельзя определить скорость убывания жидкости из резервуара путём умножения выходной скорости на площадь отверстия. Потому что струя сжимается и её сечение становится меньше площади

отверстия. Если отверстие круглое, то сечение струи сокращается до 62% от площади отверстия (давление в струе пониженное, поэтому внешнее нормальное давление сдавливает струю – примечание автора). Объяснить этот эффект легко с помощью опыта с двумя листками бумаги. Нужно просто дунуть между ними. Они притянутся друг к другу и слипнутся. Давление между листками уменьшается, и внешнее нормальное давление прижимает их друг к другу.

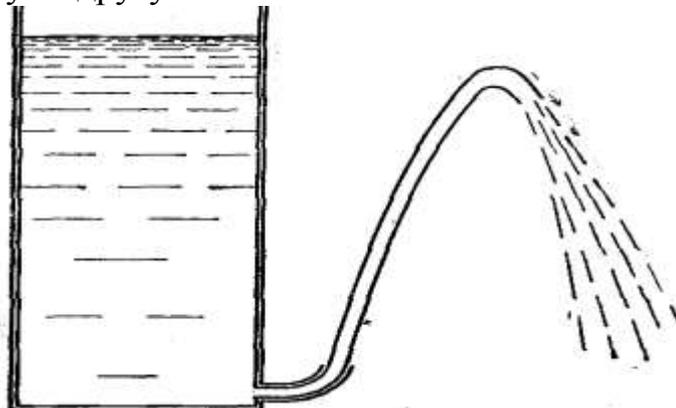


Рисунок 14-5. Визуализация наличия вязкого трения в жидкости

Наличие трения можно показать ещё одним опытом (рисунок выше). Если у резервуара с водой выходная труба направлена вверх, то и струя воды из неё будет выбрасываться вверх. Если бы скорость истечения была в точности равна значению, предсказанном формулой Бернулли, то струя воды должна была бы подняться точно до уровня воды в резервуаре. Однако даже визуально видно, что это не так. Из-за вязкого трения высота струи заметно ниже.

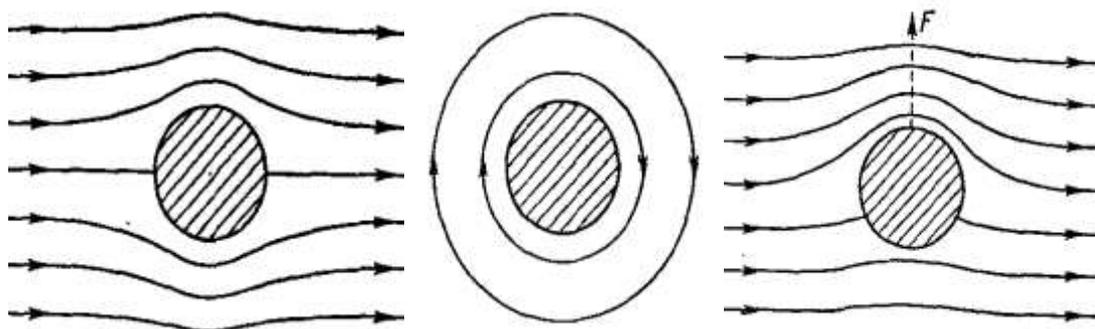


Рисунок 14-6. Вид обтекаемого потока до и после начала вращения цилиндра

Следующий опыт показывает ещё одну интересную особенность несжимаемого безвихревого потока. Если в потоке жидкости жестко зафиксировать цилиндр, то жидкость будет обтекать цилиндр способом, изображённым слева на рисунке выше. Но если цилиндр начать вращать, как показано в центре на рисунке выше, то по причине наличия вязкого трения он увлечёт во вращение прилегающие к нему слои жидкости. После этого форма обтекания примет вид, изображённый справа на рисунке выше. Этот новый поток особенно интересен. Он является суперпозицией обтекающего потока и циркуляционного потока. В результате чего

скорость потока на верхней стороне цилиндра станет больше скорости потока на нижней стороне цилиндра. Там, где скорость увеличивается, уменьшается давление, поэтому на цилиндр начинает действовать выталкивающая вертикальная подъёмная сила (при вращении цилиндра в другую сторону новая сила действует в противоположном направлении, пытаясь утопить цилиндр – примечание автора).

Окончательное крушение теории «сухой» воды наносят опыты по созданию вихревых колец с помощью прибора Тэта. Согласно этой теории, если первоначально завихрённость равна нулю, то ни при каких обстоятельствах создать завихрённость нельзя. Однако после удара по мембране прибора Тэта появляется завихрённость и создаётся вихревое кольцо, хотя первоначально ни внутри прибора, ни вокруг него не было завихрённости. В реальных жидкостях мы почти никогда не можем пренебречь внутренним трением. Проверено экспериментально, что скорость жидкости на поверхности твёрдого тела в точности равна нулю. Лопастей вентилятора собирают на себя тонкий слой пыли. Несмотря на то, что они вращаются в воздухе, поток воздуха не возмущает даже мельчайших пылинок. В «сухой» воде никаких напряжений сдвига нет. Сколь бы мало оно ни было, жидкость поддаётся и течёт. Однако в начальный момент, когда ещё равновесия нет, при давлении на жидкость силы сдвига вполне могут быть. Предположим, что имеются две параллельные плоские твёрдые пластины, между которыми находится вода (рисунок ниже). Если одну из пластин привести в движение, то по причине наличия трения придет в движение и жидкость. Скорость жидкости непосредственно вблизи каждой пластины относительно пластины равна нулю. А в неподвижной системе координат скорость жидкости будет постепенно возрастать от нуля до скорости подвижной пластины.

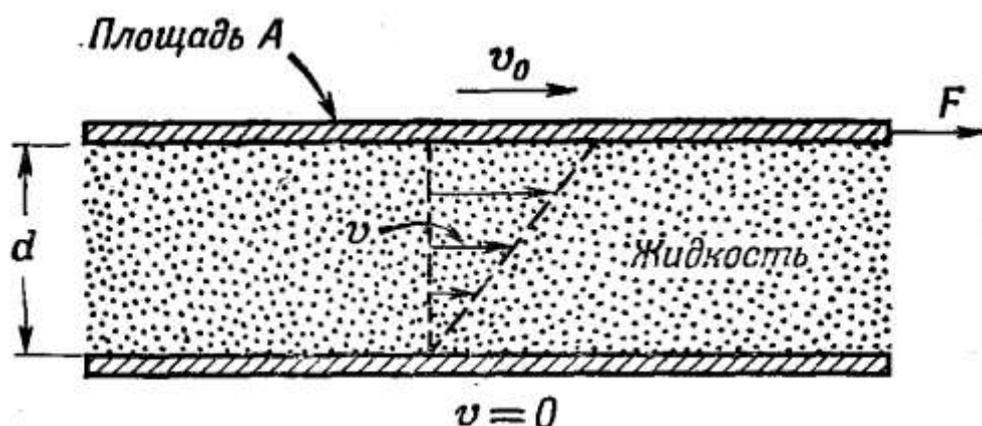


Рисунок 14-7. Поведение жидкости между неподвижной и двигающейся пластиной

Жидкость будет оказывать сопротивление движению. Сила сопротивления равна силе, необходимой для поддержания постоянной скорости движения пластины. Измерения показывают, что эта сила прямо пропорциональна произведению площади пластины на её скорость и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами. Удельная сила сопротивления называется напряжением сдвига:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

Коэффициент пропорциональности, являющийся функцией от температуры, называется коэффициентом вязкости. Если пластины свернуть в кольцо, то жидкость будет располагаться между двумя коаксиальными цилиндрами, но принцип взаимодействия жидкости с пластинами не изменится (рисунок ниже).

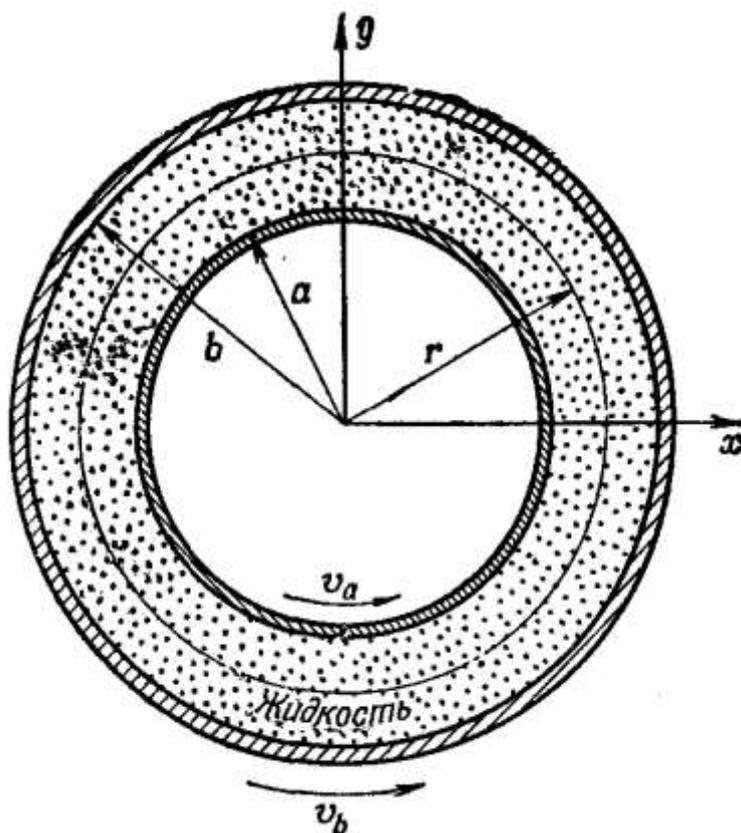


Рисунок 14-8. Поведение жидкости между неподвижным и вращающимся цилиндром

Подобным образом устроен стандартный прибор для измерения коэффициентов вязкости разнообразных жидкостей. В нём один цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью. Другой цилиндр посажен на ось, но удерживается в неподвижном состоянии пружинным динамометром, который измеряет действующий на него момент сил. Коэффициент вязкости находится из общего выражения для момента сил, где l -длина цилиндров:

$$\tau = \frac{4\pi\eta la^2b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a).$$

При сложном случае всегда можно рассмотреть в жидкости небольшой плоский прямоугольный объём, грани которого параллельны потоку (рисунок ниже). Силы в этом плоском объёме определяются выражением:

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

То есть, силы в жидкости пропорциональны скорости изменения деформации сдвига.

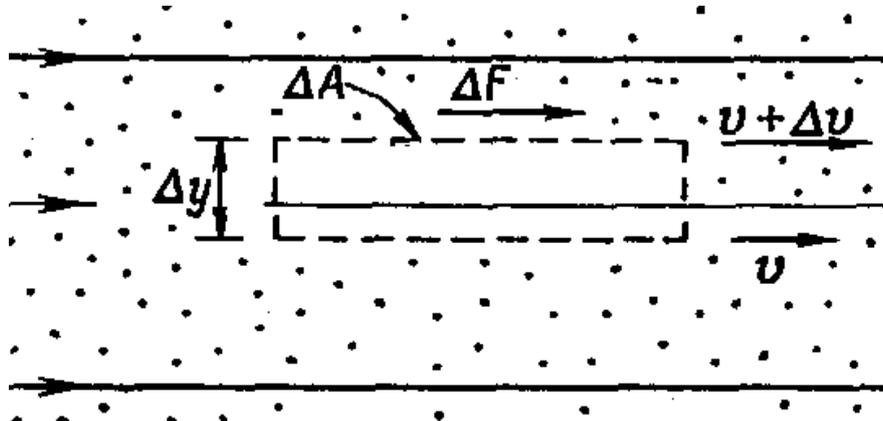


Рисунок 14-9. Часть потока жидкости в виде плоского прямоугольника

В общем случае выражение для напряжения сдвига имеет следующий вид:

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Для сжимаемой жидкости в выражение добавляется новый член:

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, который равен единице при $i=j$ и равен нулю в других случаях. Новый коэффициент пропорциональности называется вторым коэффициентом вязкости. Обычно зависимость коэффициентов вязкости от координат положения несущественна и ею можно пренебречь. Тогда вязкая сила, действующая на единицу объёма, содержит только вторые производные скорости:

$$\mathbf{f}_{\text{вязк}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Тогда уравнение движения для реальной жидкости будет иметь очень сложный вид:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Из уравнений Гельмгольца следовало, что вихри всегда движутся вместе с жидкостью. Тщательный анализ частных случаев этого уравнения позволяет сделать вывод, что вихри диффундируют в жидкости. Именно поэтому утолщаются кольца табачного дыма. С этим же связано красивое явление, возникающее при прохождении бездымного кольца через облако дыма. Когда оно выходит из облака, то к нему присоединяется некоторое количество дыма и проявляется полая оболочка из дыма. То есть, какое-то количество завихрённости диффундирует в окружающий дым, продолжая своё движение вперёд вместе с вихрем.

15. 1981 год. Шабанов, Шубин – О вихревых кольцах

Авторы, ещё, будучи школьниками, обнаружили много интересных эффектов и особенностей поведения вихревых колец. Вот что они пишут. Для получения в лабораторных условиях вихрей в воздухе мы пользовались аппаратом Тэта. Он представляет собой цилиндр, один торец которого (мембрана) затянута каким-нибудь упругим материалом (например, кожей), а в другом имеется круглое отверстие (диафрагма). Внутри цилиндра находятся два сосуда: один – с соляной кислотой (HCl), другой – с нашатырным спиртом (NH_4OH).

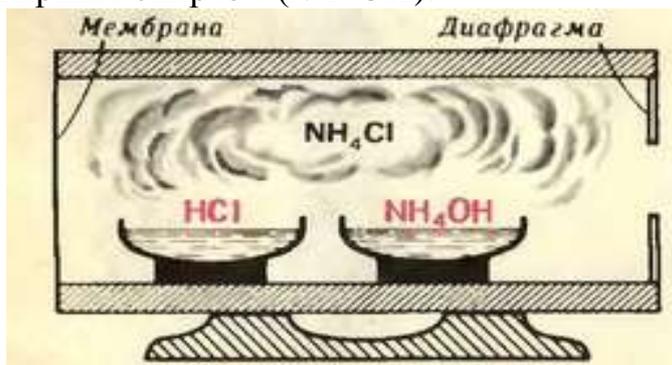


Рисунок 15-1. Аппарат Тэта

В результате в цилиндре образуется густой туман (дым) из частичек хлористого аммония (нашатыря NH_4Cl). Ударяя по мембране, мы сообщаем некоторую скорость прилегающему к мембране слою дыма. Придя в движение, этот слой вызовет уплотнение соседнего слоя, тот – следующего и так далее. Когда уплотнение дойдет до диафрагмы, дым вырвется из отверстия, приведет в движение ранее покоившийся воздух и, благодаря силам вязкого трения, сам закрутится в дымовое кольцо. Может быть, в образовании вихревых колец главную роль играют края отверстия? Проверим это. Вместо обычной диафрагмы поставим в аппарате Тэта решето. Если наша гипотеза верна, должно получиться много маленьких колец. Однако опыт показывает, что это не так, – образуется одно большое вихревое кольцо. Очень важно, чтобы дым из аппарата выходил отдельными порциями, а не непрерывной струей. Если мембрану заменить поршнем и перемещать его, из отверстия вместо колец появится непрерывная струя дыма.

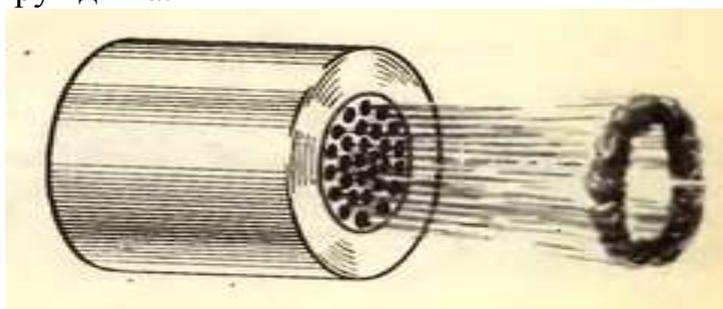


Рисунок 15-2. Использование решётчатой диафрагмы

Вихри в воде можно получить с помощью обыкновенной пипетки и чернил. Набрав в пипетку чернил, нужно их капать с высоты 2–3 см в аквариум с хорошо устоявшейся водой (в которой нет конвекционных потоков). В прозрачной воде хорошо заметны образующиеся чернильные кольца. Можно сделать немного по-другому: выпустить струю чернил из пипетки прямо в воду. В этом случае вихревые кольца получаются несколько больших размеров. Природа образования колец в воде такая же, как в воздухе; поведение чернил в воде аналогично поведению дыма в воздухе. В обоих случаях главную роль играют силы вязкого трения.

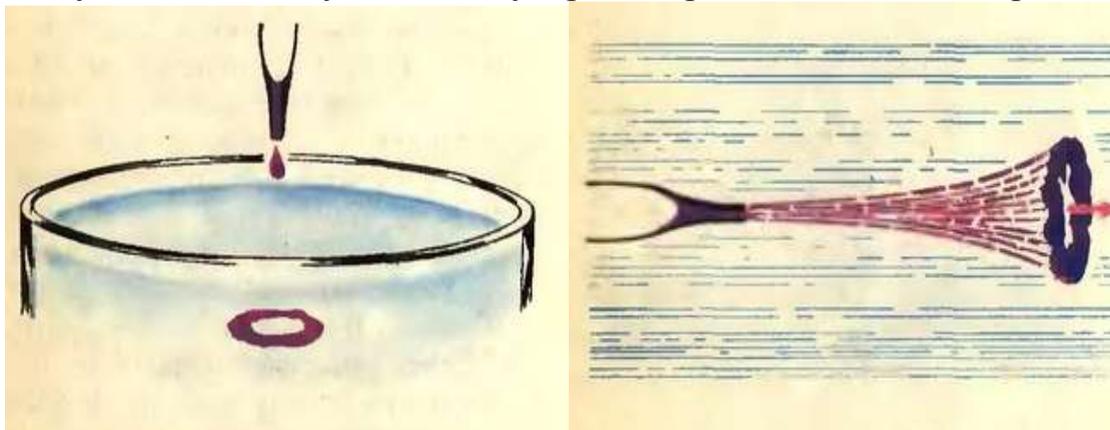


Рисунок 15-3. Формирование вихревых колец в воде

Что происходит с окружающей средой после того, как образовался вихрь? Ответить на этот вопрос помогли соответствующие опыты. На расстоянии 2–3 метров от аппарата Тэта поставим зажженную свечу. Дымовое кольцо пустим с таким расчетом, чтобы оно не врезалось в пламя свечи, а прошло рядом. Пламя либо погаснет, либо будет очень сильно колыхаться. Это говорит о том, что движется не только видимая часть кольца, но и слои воздуха, прилегающие к кольцу. Как же они движутся? Возьмем две тряпочки, одну смочим соляной кислотой, другую – нашатырным спиртом и подвесим их на расстоянии 10 – 15 см друг от друга. Пространство между ними сразу же заполнится дымом (парами нашатыря). Пустим в облако этого дыма дымовое кольцо из аппарата. После прохождения кольца через облако кольцо увеличивается в размерах, а облако приходит в круговое движение. Из этого можно заключить, что вокруг вихревого кольца воздух вращается. Аналогичный опыт можно провести и с водой. Медленно вращая воду в стакане, капнем в нее чернил и дадим устояться. В стакане образуются чернильные нити. Теперь пустим чернильное кольцо. При прохождении кольца вблизи нитей они закручиваются. Рассмотрим некоторые особенности поведения водяных вихрей. Как уже говорилось выше, если каплю чернил капнуть с высоты 2–3 см в аквариум с водой, в воде образуется чернильное вихревое кольцо. Как оно будет вести себя дальше? Оказывается, через некоторое время кольцо разделится на несколько новых колец, те в свою очередь тоже разделятся и т. д. (рисунок ниже). В аквариуме появится красивый «замок».



Рисунок 15-4. Деление чернильных колец в воде

Оказывается, для существования вихревого кольца необходим некоторый «жизненный» объем. Мы убедились в этом на таком опыте. На пути движения водяного кольца ставили трубки различных диаметров. Если диаметр трубки был чуть-чуть больше диаметра кольца, влетевшее в трубку вихревое кольцо разрушалось, а взамен возникало новое кольцо меньших размеров. Если же диаметр трубки примерно в 4 раза превышал диаметр кольца, кольцо беспрепятственно проходило через трубку. В таком случае вихрь практически не подвергался никаким внешним воздействиям. Мы провели несколько опытов по взаимодействию дымовых колец с диафрагмами различных диаметров и с плоскостью. Представим себе, что кольцо налетает на диафрагму, диаметр которой меньше диаметра кольца. Рассмотрим два случая: центральное соударение, когда скорость поступательного движения кольца перпендикулярна плоскости диафрагмы, а центр кольца проходит через центр диафрагмы, и нецентральное соударение, когда центр кольца не проходит через центр диафрагмы. В первом случае происходит следующее. Налетающее на диафрагму кольцо рассеивается, а по другую сторону диафрагмы возникает новое кольцо меньшего диаметра. Причина его возникновения – та же, что и в аппарате Тэта: воздух, движущийся вокруг первоначального кольца, устремляется в отверстие и увлекает за собой дым от рассеянного вихря. Аналогично происходит центральное соударение в случае, когда диаметр диафрагмы равен диаметру кольца или несколько больше его. Гораздо более интересен результат нецентрального соударения: вновь образовавшийся вихрь вылетает под углом к начальному направлению движения (рисунок ниже).

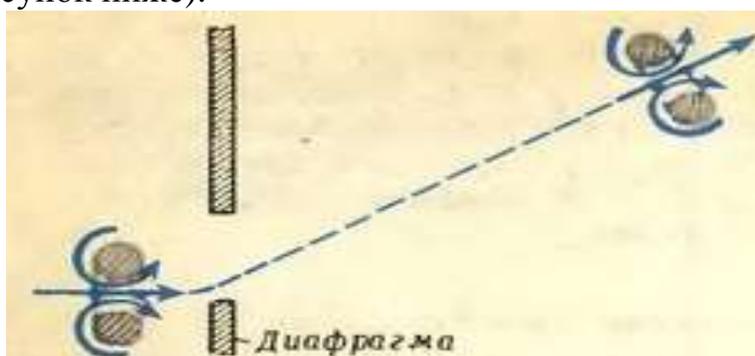


Рисунок 15-5. Прохождение вихревого кольца через диафрагму

Теперь рассмотрим взаимодействие кольца с плоскостью. Опыты показывают, что, если плоскость перпендикулярна скорости кольца, кольцо только как бы расплывается, не теряя при этом своей формы. Объяснить это можно так: поток воздуха, движущегося внутри кольца, образует область повышенного давления, в результате чего и происходит равномерное расширение всего вихревого кольца. Если же плоскость наклонить под некоторым углом к первоначальному положению, вихрь, налетая на плоскость, будет отталкиваться от нее (рисунок ниже). Этот факт тоже можно объяснить возникновением области повышенного давления в пространстве между кольцом и плоскостью.

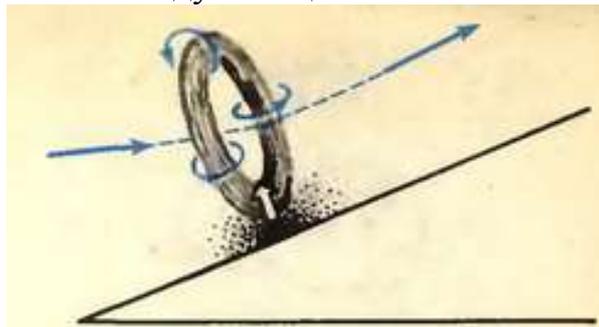


Рисунок 15-6. Взаимодействие вихревого кольца с наклонной плоскостью

Бесспорно, самыми интересными оказались опыты по изучению взаимодействия вихревых колец. Мы проводили эксперименты с кольцами и в воде, и в воздухе. Пустим каплю чернил с высоты 1 – 2 см в сосуд с водой, а через секунду пустим еще одну каплю, но уже с высоты 2 – 3 см. В сосуде образуются два вихря, движущиеся с разными скоростями: второй – быстрее, чем первый ($v_2 > v_1$). Когда кольца окажутся на одной высоте, они начнут взаимодействовать друг с другом. Оказывается, возможны три случая (рисунок ниже).

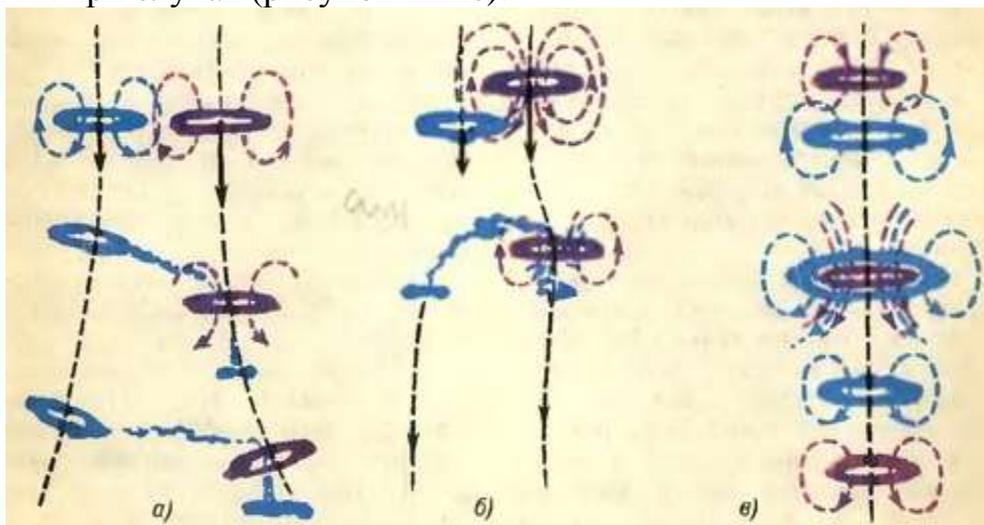


Рисунок 15-7. Три случая взаимодействия двух вихрей в воде

Первый случай – второе кольцо обгоняет первое, не задевая его. При этом происходит следующее. Во-первых, потоки воды от обоих колец как бы отталкивают кольца друг от друга. Во-вторых, обнаруживается переток

чернил с первого кольца на второе: водяные потоки второго кольца более интенсивны, они и увлекают чернила за собой. Иногда часть этих чернил проходит через второе кольцо, что влечет за собой образование нового небольшого кольца. Затем кольца начинают делиться, дальше ничего интересного нам заметить не удалось. Второй случай – кольцо 2 при обгоне задевает кольцо 1. В результате более интенсивные потоки второго кольца разрушают первое. Как правило, из оставшегося от первого кольца сгустка чернил образуются новые маленькие вихри. И наконец, третий случай – кольца испытывают центральное соударение. При этом второе кольцо проходит через первое и уменьшается в размерах, а первое, наоборот, расширяется. Как и в предыдущих случаях, это происходит за счет взаимного действия водяных потоков одного кольца на другое. В дальнейшем кольца начинают делиться.

Взаимодействие дымовых колец в воздухе мы исследовали с помощью аппарата Тэта с двумя отверстиями. Оказалось, что результаты опытов сильно зависят от силы и продолжительности удара по мембране. В нашей установке удар проводился тяжелым маятником. Было обнаружено, что, если расстояние l между отверстиями меньше диаметра d каждого отверстия ($l < d$), два потока воздуха перемешиваются и образуется одно вихревое кольцо. При $d < l < 1,5 d$ кольцо, как правило, вообще не образуется. Во всех остальных случаях возникают два кольца. При этом, если $l > 4 d$, кольца не взаимодействуют друг с другом, а если $1,5 d < l < 4 d$, кольца сначала сближаются, а затем, в конце своей «жизни», иногда расходятся. Сближение можно объяснить тем, что в пространстве между кольцами образуется нечто подобное «мнимому» кольцу (рисунок ниже), которое движется в противоположную сторону. В результате плоскости настоящих колец поворачиваются друг к другу, и кольца начинают сближаться.

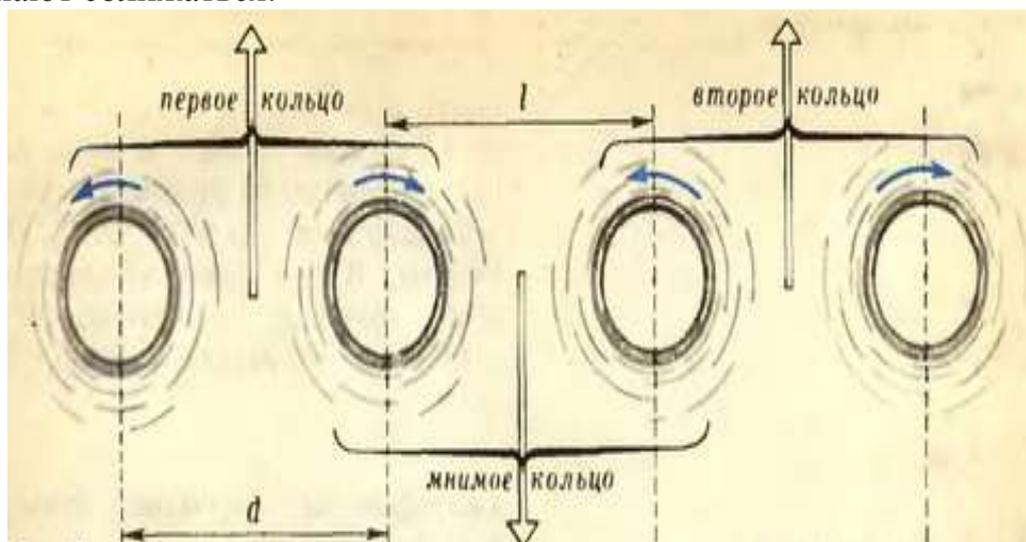


Рисунок 15-8. Боковое взаимодействие воздушных вихрей

Что происходит с кольцами в конце «жизни», нам выяснить не удалось.

16. 1993 год. Мелешко, Константинов – Динамика вихревых структур

Динамика точечных вихрей в идеальной жидкости

Авторы пишут, что простейшим примером движения системы точечных вихрей является задача о движении двух вихрей.

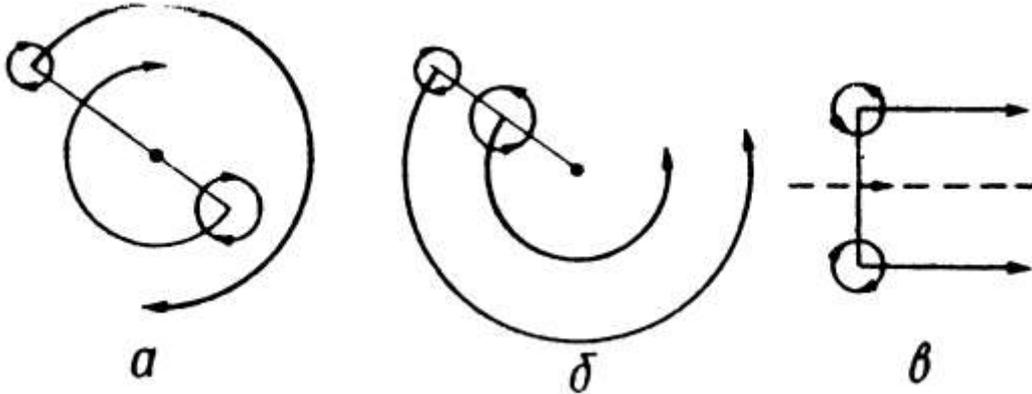


Рисунок 16-1. Основные типы взаимодействия двух линейных вихрей

Математические решения показывают, что два вихря совершают равномерное движение по двум концентрическим окружностям. При этом, если знаки интенсивностей одинаковы, то центры обеих окружностей находятся внутри центра, соединяющего вихри (рисунок 16.1а). Если знаки интенсивностей противоположные, то центры обеих окружностей находятся вне отрезка (рисунок 16.1б) на прямой, являющейся продолжением этого отрезка в сторону более сильного по модулю интенсивности вихря. Важным частным случаем является вихревая пара, у которой интенсивности равны по модулю, но противоположны по знаку. В этом случае центр завихрённости расположен на бесконечности, а вихри движутся в одном направлении с постоянной скоростью по прямым, перпендикулярными к отрезку, соединяющему вихри (рисунок 16.1в).

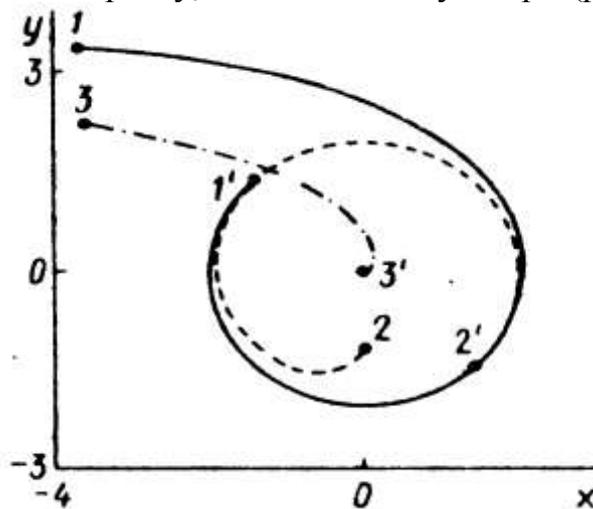


Рисунок 16-2. Пример взаимодействия трёх линейных вихрей

Взаимодействие трёх вихрей зависит от их начального взаиморасположения. Задача поиска траектории движения значительно упрощается, если рассматривать только вихри с одинаковой интенсивностью, располагающиеся в одной плоскости. Если $k_1=k_2=k_3=k$, то в самом простом случае вихревой равносторонний треугольник вращается вокруг своего центра завихрённости с постоянной угловой скоростью $3k/\pi$. Если $k_1=k_2=-k_3=k$, то возникает случай взаимодействия вихревой пары с одиночным вихрем. Наиболее интересен случай, когда движение (рисунок 16.2) происходит так, что вихри 1 и 2 с течением времени стремятся выйти на предельный цикл - окружность радиуса 2, а вихрь 3 стремится к фокусу - началу координат. Возникает пример равномерного вращения вихрей 1 и 2 по окружности радиуса 2, в центре которой находится покоящийся вихрь 3. Вихрь 3 заставляет вращаться одинаковые вихри 1 и 2 в сторону, противоположную их вращению в случае отсутствия третьего вихря.

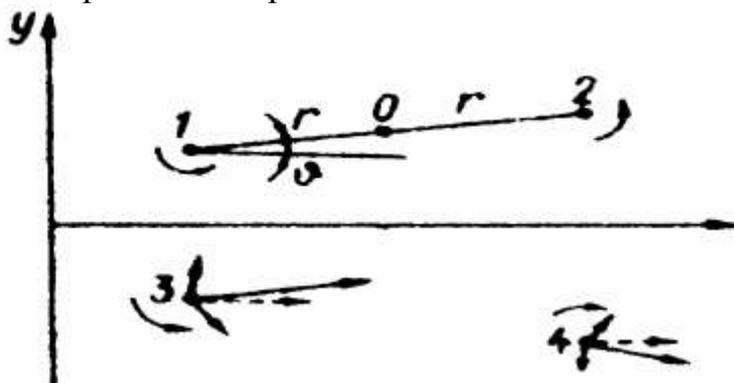


Рисунок 16-3. Пример взаимодействия четырёх вихрей в виде чехарды двух пар (1;3) и (2;4)

Задача поиска траектории движения четырех взаимодействующих вихрей значительно упрощается, если взаимодействуют две вихревых пары. Рассмотрим движение системы четырех вихрей, обладающей симметрией относительно координатной плоскости $y=0$, т.е. оси x . Будем считать, что вихрь 1 имеет координаты (x_1, y_1) и интенсивность k_1 ; вихрь 2 имеет координаты (x_2, y_2) и интенсивность k_2 . Тогда вихрь 3 будет иметь координаты $(x_1, -y_1)$ и интенсивность $-k_1$, а вихрь 4 будет иметь координаты $(x_2, -y_2)$ и интенсивность $-k_2$. Такой тип движения представляет собой взаимодействие двух коаксиальных вихревых пар 1; 3 и 2; 4, имеющих общую ось симметрии. Процесс взаимодействия двух коаксиальных пар в зависимости от знаков интенсивностей и начального расположения состоит либо в движении пар в одном направлении, сопровождающемся их периодической «чехардой» - попеременным проскакиванием одной пары внутри другой и чередованием передней и задней пар, либо в их встречном движении. Схематично процесс движения вихрей можно проанализировать, обратившись к рисунку 16.3, где показан случай, когда интенсивности k_1 и k_2 имеют одинаковый знак. Анализируя для каждого из вихрей вектор скорости, сообщаемый ему тремя остальными вихрями, можно легко заметить, что вихри задней пары 1;3 имеют тенденцию к сближению, а вихри передней пары 2;4 удаляются.

Поскольку при сближении скорость пары 1;3 увеличивается в направлении движения, то вихри этой пары догоняют удаляющиеся и замедляющиеся вихри пары 2;4, проскакивают между ними и оказываются впереди. После этого отставшие и удалившиеся вихри пары 2; 4 начинают сближаться и ускорять свой ход, а проскочившая вперед пара 1; 3 замедляясь, расширяется, пока не пропустит через себя находившуюся за ней пару, и «игра» начинается снова. При таком схематичном описании явления чехарды остаётся невыясненным вопрос: при всяком ли начальном расположении вихревых пар, даже одинаковой интенсивности, существует возможность их попеременного чередования. В некоторых работах установлено, что при определенных геометрических соотношениях две пары точечных вихрей после одного взаимного прохождения могут удаляться на бесконечное расстояние, становясь по существу невзаимодействующими. Количественно эти условия выражены через отношения расстояний между вихрями в момент прохождения одной пары через другую.

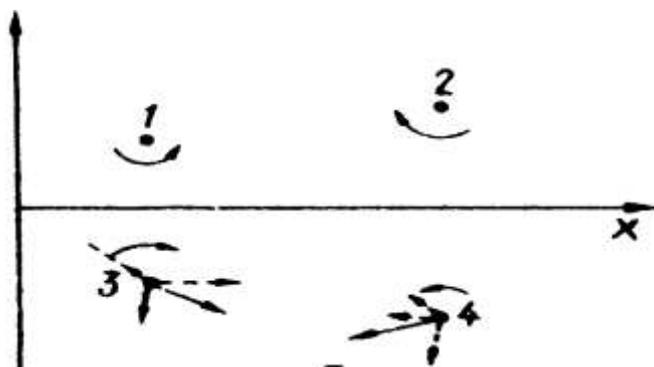


Рисунок 16-4. Столкновение двух пар (1;3) и (2;4) при наличии осевой симметрии

На рисунке 16.4 приведена соответствующая схема для движения двух пар, если k_1 и k_2 имеют разные знаки. Направления векторов скорости пар показывают, что при сближении они все дальше уходят от оси x . В случае когда $|k_1|=|k_2|$, образуются новые, уже в общем случае некоаксиальные пары 1;2 и 3;4.

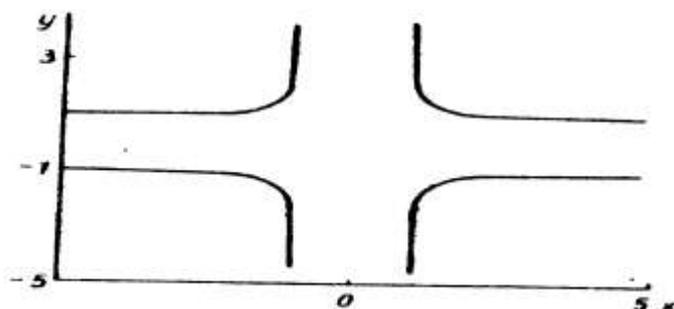


Рисунок 16-5. Обменное взаимодействие двух полностью симметричных пар

В частном случае (рисунок 16.5) имеем движение навстречу друг другу полностью симметричных пар 1;3 и 2;4. Взаимодействие пар по типу обменного рассеяния приводит к тому, что образуются новые пары 1;2 и 3;4, удаляющиеся от начала координат, причем расстояние между вихрями с течением времени стремится к 2. Траектории этих вихрей

асимптотически приближаются к прямым $x=\pm 1$, перпендикулярным к оси x . Плоскость $x=0$ является плоскостью симметрии. Если плоскость симметрии заменить твёрдой стенкой, то перейдём к задаче взаимодействия вихревой пары со стенкой. Общепринято, что взаимодействие со стенкой является полным аналогом, зеркальным отражением взаимодействия двух пар. Однако, Баркером описан тщательный лабораторный эксперимент, выполненный в жидкости. Он показал, что вихревая пара будет «отскакивать» от твердой границы после того, как расстояние между вихрями превысит приблизительно учетверенное начальное. Такое расхождение между теорией и экспериментом показывает ограниченную применимость для слабо вязкой жидкости (воды) модели точечных вихрей. Дальнейший анализ этой задачи должен быть связан с учетом конечности размеров вихревых пар.

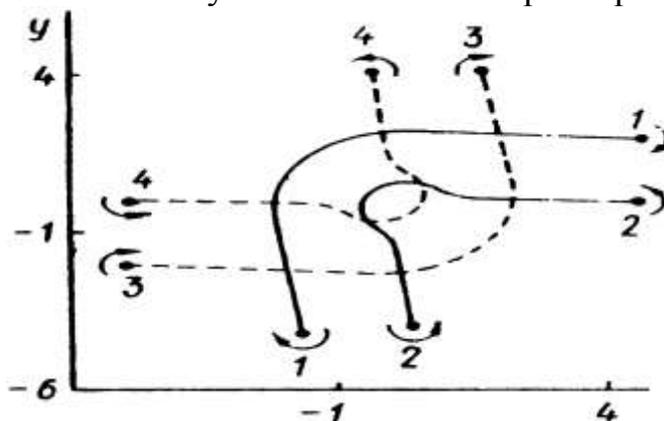


Рисунок 16-6. Столкновение двух пар (1;2) и (3;4) при отсутствии осевой симметрии

При отсутствии осевой симметрии возникают другие эффекты. На рисунке 16.6 изображён эффект прямого столкновения. Здесь в процессе взаимодействия вихревые пары существенно изменили траекторию своего движения. На рисунке 16.7 изображён эффект обменного столкновения. Здесь в процессе взаимодействия вихревые пары поменяли партнёров. Сталкивались пары 1;2 и 3;4, а разлетелись в разные стороны пары 1;4 и 2;3. Процесс аналогичен процессу обменного рассеяния на рисунке 16.5.

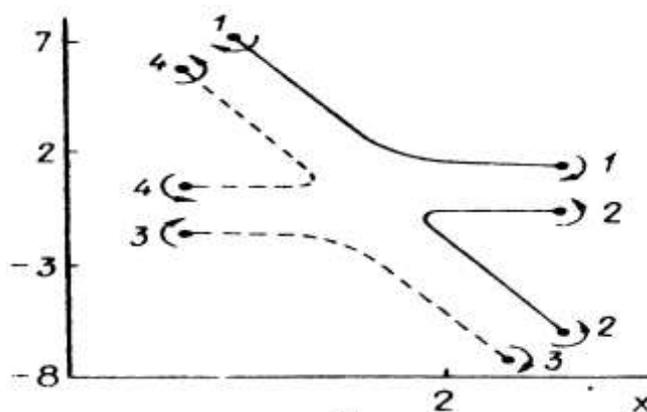


Рисунок 16-7. Обменное взаимодействие двух пар (1;2) и (3;4) при отсутствии осевой симметрии

Может возникнуть ситуация, когда в процессе столкновения пары не могут мирно разойтись (рисунок 16.8), происходит явление взаимного захвата. В результате сложившегося баланса сил они начинают вращаться вокруг центра тяжести.

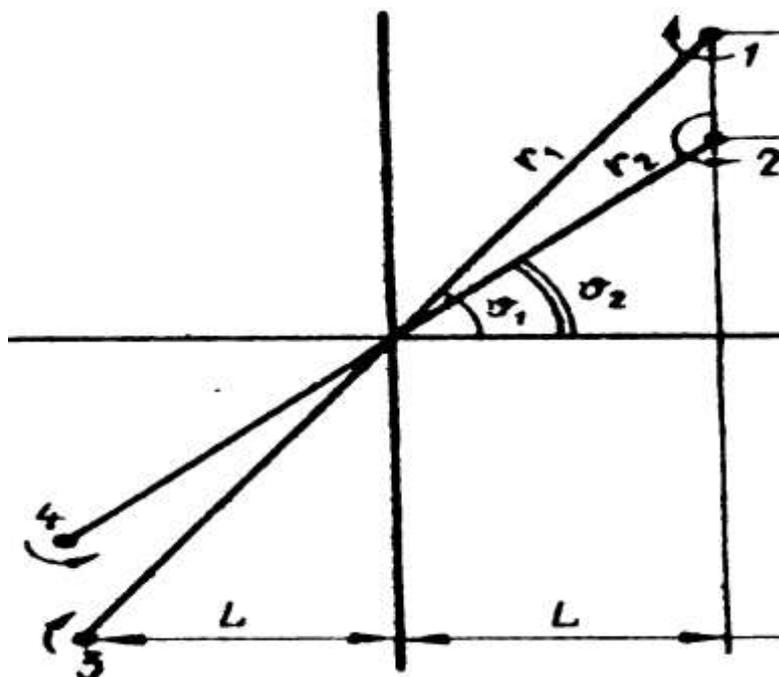


Рисунок 16-8. Явление взаимного захвата при столкновении двух пар (1;2) и (3;4)

Статические конфигурации вихрей

Вильям Томсон Кельвин сформулировал вопрос о возможности существования такого частного класса движений N точечных вихрей одинаковой интенсивности, при котором система вращается как целое с некоторой постоянной скоростью. Такой класс вихревых движений наряду с поступательным движением всех вихрей без изменений относительной конфигурации системы был назван им «вихревой статикой» и разрабатывался в связи с концепцией теории вихревых атомов. Эта теория, впоследствии, оставленная, тем не менее, позволила получить ряд интересных результатов, касающихся состояний равномерного вращения конфигураций вихрей. Математически задача вихревой статики сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, которая получается при предположении об установившемся вращении. Для решения таких систем в настоящее время существуют хорошо разработанные надежные численные методы. Однако частный класс решений получен еще в работе Дж.Дж.Томсона, удостоенной премии Адамса в 1883 г. Таким частным классом решений было расположение точечных вихрей в вершинах правильного многоугольника. Важным является вопрос об устойчивости вращения такой конфигурации с постоянной угловой скоростью. Была доказана теорема (впоследствии названная теоремой Дж.Дж.Томсона) о том, что такая конфигурация при $N < 6$ будет устойчивой относительно малых линейных возмущений положения вихрей и неустойчивой при $N > 7$. Задача отыскания

устойчивых состояний равномерного вращения одинаковых точечных вихрей исследовалась Кэмпбелом. На основе вариационного принципа им было показано, что для любого N существует, по крайней мере, одно устойчивое состояние вращения и для $N=1,2,\dots,30,37,50$ составлен обширный так называемый «Лос-Аламоссский» каталог установившихся вращений на плоскости. Оказалось, что в таких устойчивых состояниях вихри располагаются на одной или нескольких концентрических окружностях - «атомных оболочках» по терминологии Кельвина. В некоторых ситуациях вращательной симметрии относительно центра координат обнаружено не было. Так, например, для $N=11$ две устойчивые конфигурации $2 + 9$ и $3 + 8$ (по числу вихрей на двух концентрических окружностях) имеют только плоскость симметрии. С проблемой равномерно вращающихся вихревых конфигураций тесным образом связан эксперимент А.М.Майера с плавающими магнитами, в котором несколько (до семи) одинаково намагниченных иголок были воткнуты в маленькие пробочки одноименным полюсом. Эта система помещалась в кювету с водой. При этом наблюдалось взаимное отталкивание одноименных полюсов плавающих магнитов. При приближении сверху сильного соленоидального магнита противоположной полярности возникало притяжение плавающих магнитов к точке пересечения поверхности воды с перпендикуляром, опущенным из центра большего магнита. Противоборство сил отталкивания и притяжения приводит к тому, что система плавающих магнитов располагается в некоторой равновесной конфигурации, которая полностью совпадает со стационарной конфигурацией вращающихся N точечных вихрей.

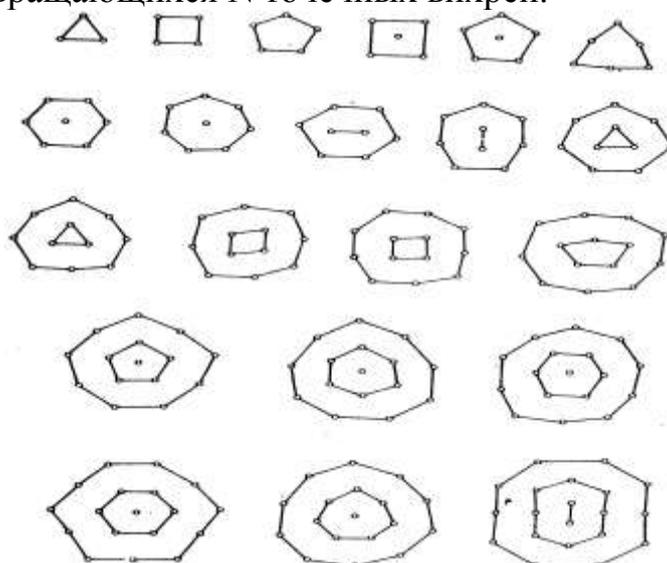


Рисунок 16-9. Фрагмент каталога Майера устойчивого расположения плавающих магнитов

В последующей публикации Майера приведены фигуры устойчивого расположения вихрей (по аналогии с указанным выше назовем их «Гарвардским каталогом»). На рисунке 16.9 воспроизведен фрагмент этого каталога. Видно, что два, три, четыре и пять вихрей образуют правильный многоугольник, вершины которого лежат на одной окружности. Для $N=11$

система обладает плоскостью симметрии. Конфигурации, принимаемые плавающими магнитами для $N < 42$, систематизированы А.М.Майером в виде таблицы. Идея систематизации состоит в упорядочении числа магнитов по числу групп или классов, близких к окружностям линий — «орбит», на которых расположены магниты. При этом устойчивые конфигурации одного класса образуют «ядра» последующих. Так, когда число магнитов не больше пяти, то они расположены в углах правильного многоугольника. Когда их число больше пяти, то расположение становится иным. Шесть магнитов располагаются устойчиво не на углах шестиугольника, но делятся на две системы ($6=1+5$), так что один находится в центре, а пять — по окружности в углах правильного пятиугольника. Такое состояние оказывается более устойчивым, чем состояние $6=3+3$. Расположение на двух «орбитах» продолжается до тех пор, пока число магнитов не достигнет пятнадцати, когда получается три группы: $15=1+5+9$; при двадцати семи магнитах возможны комбинации $27=5+9+13$ и $27=1+5+9+12$ и осуществляется переход к четырем «орбитам» и т.д. Такое поведение плавающих магнитов — образование одной или нескольких устойчивых конфигураций, упорядоченных по кольцевым «орбитам», — на рубеже XIX — XX в. стимулировало ученых на построение некантовой модели атома по такой схеме. Эти построения впоследствии оставлены, но несмотря на это многие замечательные мысли и наблюдения, относящиеся к периодичности строения вещества, ни в коем случае не утратили своего значения. Выдающийся американский экспериментатор Р.Вуд предложил существенную модификацию опытов А.М.Майера. В кювету с ртутью помещали стальные шарики подшипников и к ним подносили мощный электромагнит. Достоинство такой методики заключалось в большей степени однородности системы. Несмотря на значительное число численных и экспериментальных исследований, в этой задаче остается без должного теоретического понимания ряд вопросов. К ним относятся, например, выяснение причин образования плоскости симметрии, распределение вихрей по концентрическим окружностям и т.д.

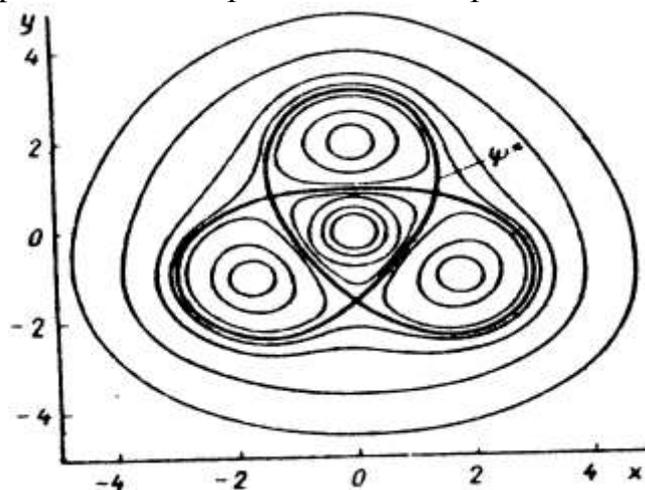


Рисунок 16-10. Покоящаяся комбинация из четырёх вихрей (в центре другая полярность)

Вопрос о возможности устойчивых стационарных вращающихся конфигураций N точечных вихрей произвольной интенсивности чрезвычайно сложен и в настоящее время мало изучен. Вместе с тем вопрос о неподвижных конфигурациях вихрей одинаковой по модулю интенсивности исследован более подробно. При этом вихри генерируют такое поле скоростей, что жидкость вокруг них находится в движении. Математическое исследование и нахождение таких ситуаций позволяют глубже проникнуть в особенности нелинейной вихревой динамики. Кроме очевидной ситуации одного покоящегося вихря возможна комбинация из четырех покоящихся вихрей. Это возможно, когда три вихря одного знака расположены в вершинах равностороннего треугольника, а вихрь противоположного знака расположен в центре этого треугольника (рисунок 16.10). Анализ суммарных векторов наведенных скоростей в каждом из вихрей показывает, что они тождественно равны нулю. Таким образом, конфигурация остается неподвижной. Метод отыскания конфигураций основан на решении дифференциального уравнения. Комбинации вихрей противоположного знака образуют семейство «магических» чисел $(1;0)$, $(3;1)$, $(6;3)$, $(10;6)$ и т.д. Первые две пары чисел представляют собой описанные выше ситуации. Координаты третьей комбинации изображены на рисунке 16.11.

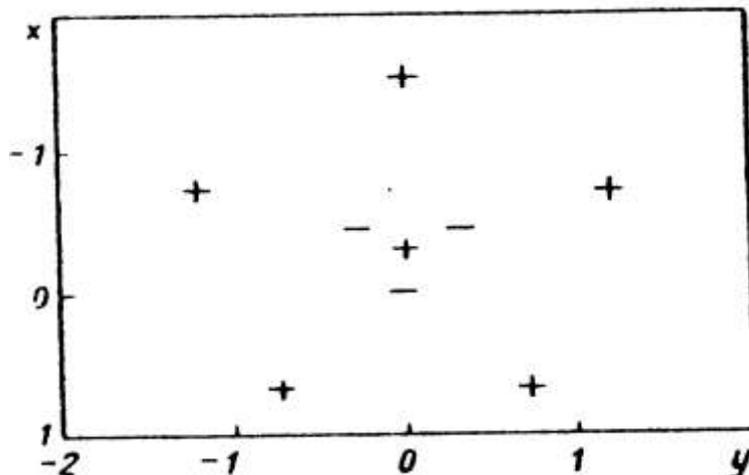


Рисунок 16-11. Покоящаяся комбинация из 9 вихрей (в центре и снаружи другая полярность)

Осесимметричные вихревые структуры

Детально с помощью фотографии исследованы условия генерации и эволюции колец в воде. Вихревые кольца в жидкости образуются лишь тогда, когда имеет место разрыв течения. В исследованиях это определялось кратковременным (импульсным) выпуском жидкости из трубки. Жидкость находилась в стеклянном лотке, а для производства колец использовалась цилиндрическая трубка диаметром 7,7 см и длиной 6,6 см. Один торец трубки был наглухо закрыт, а на другом устанавливались металлические диски с одним (1 см) либо с двумя (0,85 см) отверстиями. В трубку наливалась вода, подкрашенная

фенолфталеином, и с помощью электромагнитной системы по ней наносился короткий удар. Таким образом генерировались вихревые кольца, движущиеся в лотке со скоростью примерно 2 м/с. На пути их следования размещалась группа плавающих мелких частиц либо натянутый на раму кусок шифона или промокательной бумаги. Отмечено, что такие препятствия не изменяют характера движения вихревого кольца, которое просачивается сквозь них. Наиболее любопытным было расположение на пути кольца серебряной цепочки для карманных часов. Цепь начинает изгибаться еще до непосредственного контакта с кольцом, что подтверждает наличие у него «атмосферы» — эллипсоидальной области жидкости, движущейся вместе с кольцом и обладающей значительной кинетической энергией. Детально изучен и процесс отражения вихревого кольца от свободной поверхности воды при различных углах падения. Экспериментально найдено, что если угол между начальным направлением движения вихревого кольца и поверхностью воды меньше 22 градусов, то кольцо отражается. В других случаях кольцо «прорывает» поверхность и образует фонтан воды над ней. При анализе движения вихревого кольца в двухслойной жидкости (нижний слой — более тяжелая солёная вода) наблюдалось явление преломления, весьма схожее с оптическими законами. Экспериментально обнаружена «упругость» вихревых колец при косом ударе, когда два дымовых вихревых кольца отскакивали друг от друга и начинали колебаться, как это происходит при соударении в воздухе двух каучуковых колец. Еще одним замечательным свойством дымовых вихревых колец является их отклонение от приближаемого к ним сбоку острия ножа.

Задачи о взаимодействии круговых вихревых колец принадлежат к числу наиболее интересных проблем динамики завихренности. С момента опубликования работы Гельмгольца, где приводится качественное описание совместного движения двух коаксиальных вихревых колец, постоянный интерес к этой области обусловлен не только внутренней красотой задач, но и прямым применением полученных при их решении результатов к объяснению природы различных физических явлений. Решение задачи для общего случая движения нескольких произвольно ориентированных вихревых колец наталкивается на огромные математические трудности и в настоящее время отсутствует. Картина взаимодействия двух одинаковых вихревых колец качественно описана Гельмгольцем. При движении колец в одном направлении она заключается в попеременном проскакивании (чехарде) одного кольца внутри другого. Радиус впереди движущегося кольца увеличивается, при этом скорость его уменьшается. Следовавшее за ним кольцо сужается, и скорость его увеличивается. После проскакивания кольца меняются местами, и их схема движения периодически повторяется. Если два совершенно одинаковых кольца движутся навстречу друг другу, то при их сближении будет наблюдаться увеличение радиусов. Кольца не смогут проскочить одно внутри другого, а скорости их асимптотически стремятся к нулю при

увеличении времени. Несмотря на то, что описание такого процесса взаимодействия почти дословно цитировалось в учебниках по гидромеханике, до последнего времени не доставало полноты описания явления при произвольных начальных параметрах колец. Рассмотрим различные типы движения двух колец, движущихся в одном направлении. В этом случае ясно, что не всегда будет наблюдаться взаимная чехарда колец. Если кольца обладают несоизмеримыми энергетическими параметрами, то, вероятней всего, они слабо прореагируют друг на друга. В связи с этим возникает вопрос: при каких начальных параметрах колец возможно их периодическое взаимодействие? В работе Хикса отмечено, что взаимная чехарда колец независимо от начального удаления возможна только в том случае, когда на бесконечности кольца имеют одинаковые самоиндуцированные скорости. В противном случае либо заднее кольцо не догонит переднего, либо заднее кольцо догонит переднее, пройдет сквозь него, но после этого расстояние между ними будет неограниченно увеличиваться. Дайсон доказал теорему, что максимальное удаление двух колец достигается строго при равенстве их текущих радиусов.

Задача движения колец навстречу друг другу, за исключением классического случая двух совершенно симметричных колец, имеющих интенсивность разных знаков, до последнего времени менее изучена. Возможно как проникновение одного кольца внутри другого, так и явление взаимного захвата. Математическое исследование конкретных траекторий движения позволяет выделить четыре возможных случая столкновения движущихся навстречу друг другу вихревых колец. Первым типом столкновения является хорошо известный и изученный случай встречного движения двух совершенно симметричных относительно плоскости вихревых колец. При сближении колец их радиусы бесконечно увеличиваются, а расстояние между ними непрерывно уменьшается. Однако кольца никогда не проходят одно через другое. Малейшее отклонение одного из параметров от предельной ситуации приводит к взаимному проникновению колец. Анализ начальных состояний колец показал, что характер движения во втором и третьем типе столкновения определяется тем, что кольцо, имеющее наибольшую самоиндуцированную энергию, всегда проникает внутрь слабого кольца. Последний тип столкновения состоит в явлении взаимного захвата. При этом кольца, несмотря на противоположные знаки интенсивностей, будут двигаться в одном направлении. Явление взаимного захвата возможно только при очень малых начальных расстояниях между вихрями (намного меньше радиусов вихрей), причем когда начальные энергии колец близки друг другу.

17. 2001год. Ахметов – Формирование и основные параметры вихревых колец

Постановка экспериментов

В данной работе изложены результаты экспериментального исследования характеристик вихревых колец, формирующихся при импульсном истечении затопленной струи из цилиндрического сопла, в зависимости от параметров, определяющих процесс формирования вихревого кольца. Вихревые кольца генерировались с помощью экспериментальной установки, которая состоит из ресивера 1 со сжатым воздухом, перепускного клапана 2 и расширительной камеры 3 с выходным соплом 4 (рисунок ниже).

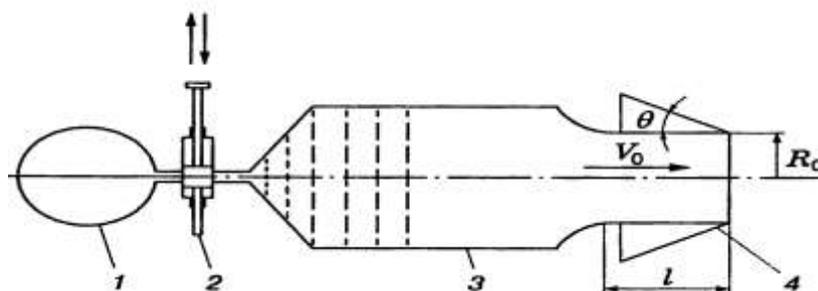


Рисунок 17-1. Экспериментальная установка для генерации вихревых колец

Внутренний канал сопла, состоящий из входной конфузурной части и выходной цилиндрической части длиной l и радиусом выходного отверстия $R_0=0,0375$ м, обеспечивает выброс из камеры затопленной воздушной струи с равномерным профилем скорости на срезе сопла. Наружная поверхность сопла коническая. Через быстродействующий электромагнитный клапан 2 расширительная камера связана с ресивером 1 со сжатым воздухом. При открытии клапана сжатый воздух поступает из ресивера в камеру и выталкивает содержащийся в ней воздух в сопло. Крупные завихрения и пульсации воздуха в камере, возникающие при открытии клапана, гасятся системой мелкоячеистых сеток. Через определенное время $1\text{мс} < t < 1000\text{мс}$ клапан закрывается, и струя из сопла прерывается. Начальное давление в ресивере выбрано достаточно большим (5 МПа), чтобы оно существенно не изменялось за время истечения и обеспечивало постоянную скорость истечения через калиброванное отверстие клапана. Этим достигается постоянная скорость струи V_0 из сопла. Длина и объем камеры выбраны достаточно большими, чтобы выбрасываемая из сопла струя образовывалась из невозмущенного воздуха, заполняющего камеру до выстрела, а газ, поступающий из ресивера, не успевал дойти до среза сопла. Однако чрезмерное увеличение размеров камеры приводило к возникновению интенсивных низкочастотных колебаний в сопле, так же как в резонаторе Гельмгольца. Для ограничения уровня пульсаций на боковой поверхности камеры были просверлены небольшие демпфирующие отверстия. Экспериментальная

установка обеспечивала идентичность параметров струи и вихревых колец, получаемых при повторных пусках. Типичная осциллограмма сигнала термоанемометра, характеризующая скорость струи на срезе сопла в зависимости от времени, показана на рисунке ниже.

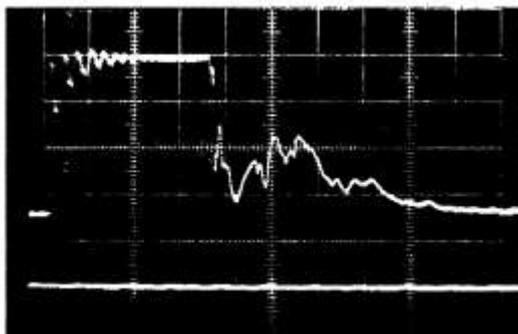


Рисунок 17-2. Осциллограмма, характеризующая скорость струи на срезе сопла

Параметры вихревого кольца

Вихревое кольцо можно представить как замкнутый объем завихренной жидкости, имеющий форму, близкую к сплюснутому эллипсоиду вращения, который движется с поступательной скоростью вдоль малой оси эллипсоида. Этот замкнутый объем вихревого кольца называют атмосферой вихря. Картина движения окружающей атмосферу вихря среды аналогична картине безотрывного потенциального обтекания соответствующего твердого тела (рисунок ниже). R — радиус кольцевого вихря (или радиус круговой оси ядра вихря), r_a — радиус ядра, a , b — длины полуосей атмосферы вихря, U_0 — поступательная скорость кольцевого вихря.

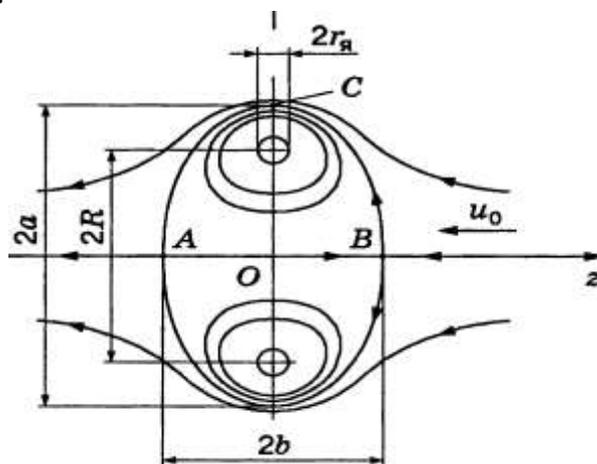


Рисунок 17-3. Линии тока среды вокруг вихря

Внутри атмосферы вихря жидкость циркулирует по замкнутым линиям тока, охватывающим тороидальное ядро вихря. Распределение завихренности в меридиональном сечении вихревого кольца имеет вид колоколообразной кривой с максимумом в центре ядра, причем, внутри ядра, занимающего в большинстве случаев лишь 3-5 % площади сечения вихря, сконцентрировано до половины полного потока завихренности (циркуляции скорости). Параметры вихревого кольца определялись по полю скорости, измеренному с помощью двух миниатюрных

термоанемометрических датчиков. Датчики устанавливались на фиксированном расстоянии $z = 12R_0$ от среза сопла. Это расстояние выбрано так, чтобы процесс образования вихревого кольца во всех опытах был завершен к моменту прихода вихря к датчикам.

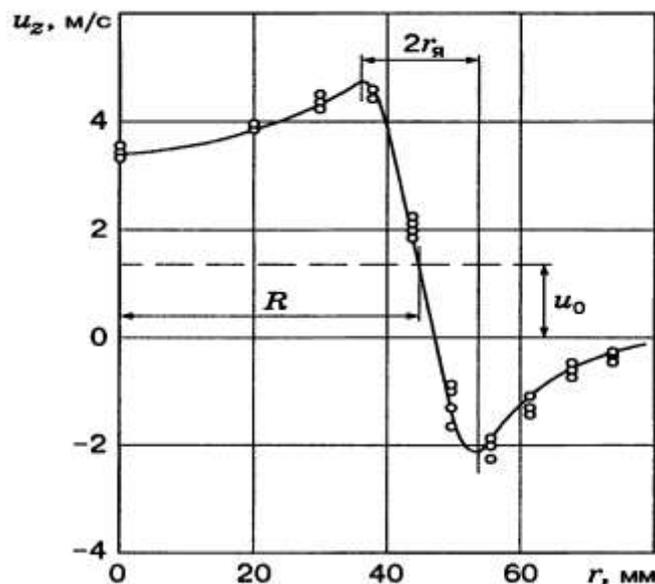


Рисунок 17-4. График осевой компоненты скорости вихревого течения

На рисунке выше приведен один из экспериментальных графиков осевой компоненты скорости $U_z(r)$ в плоскости $z=0$ в системе координат, связанной с вихревым кольцом. Точка пересечения экспериментальной кривой с прямой $U_z = U_0$ соответствует центру ядра вихря и определяет радиус вихря R . В ядре вихря U_z изменяется практически линейно. Расстояние между экстремумами на концах линейного участка кривой $U_z(r)$ равно удвоенному радиусу ядра вихря. Более точно радиус ядра определяется по распределениям радиальной компоненты скорости $U_r(z)$ при $r=R_0$, так как наибольший и наименьший пики на таком графике выражены более четко. Длины полуосей вихревого кольца определяются следующим образом: за удвоенную длину малой полуоси $2b$ принимается расстояние между двумя точками распределения $U_z(z,0)$, где U_z принимает нулевые значения (точки ветвления линии тока на оси z). Для определения длины полуоси a вычисляется распределение функции тока при $z = 0$. Расстояние по оси r между точками, соответствующими нулевым значениям функции тока, равно a . Для определения поступательной скорости U_0 вихревое кольцо визуализировалось дымом и при движении в зоне датчиков освещалось узким щелевым светом. Осветитель собран из пяти импульсных ламп, которые в заданные моменты времени дают пять последовательных вспышек. Поэтому на одном кадре фотокамерой фиксируются пять последовательных положений вихря. По измеренным моментам вспышек и положениям вихря на фотографии определяется скорость поступательного движения вихревого кольца.

Зависимость структуры вихревого кольца от длины струи

В данной серии опытов вихревые кольца получались при истечении воздушной струи с фиксированной скоростью $V_0=7,3\text{ м/с}$. Радиус выходного отверстия сопла $R_0=37,5\text{ мм}$. Число Рейнольдса струи при этом постоянно: $Re=18250$. Длина струи варьировалась за счет изменения времени истечения струи. Исследования проведены при пяти значениях длины струи: $L=70,142,286,420,695\text{ мм}$. Поступательная скорость кольца увеличивается лишь при первых трёх значениях длины струи, в дальнейшем не изменяется. При всех пяти значениях увеличиваются радиусы вихря и ядра. Объем атмосферы вихря линейно зависит от длины выбрасываемой струи.

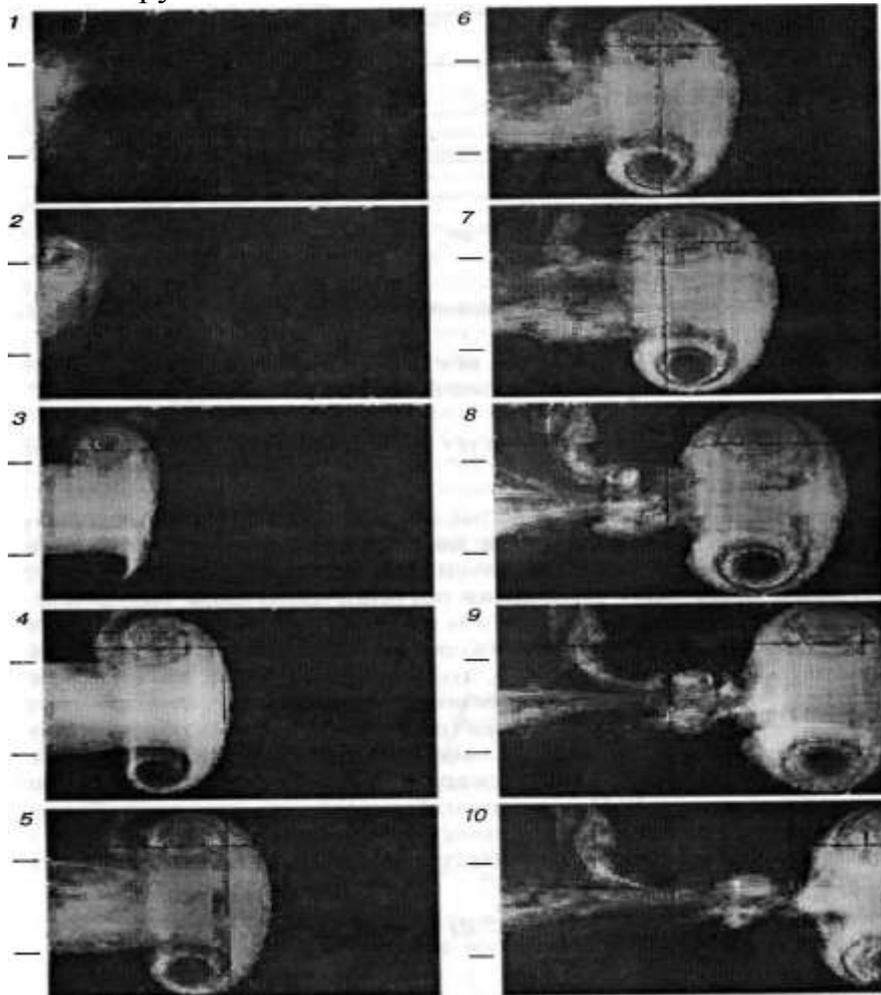


Рисунок 17-5. Последовательные стадии формирования вихревого кольца

На рисунке выше приведена кинограмма, на которой показаны характерные фазы формирования вихревого кольца при истечении затопленной воздушной струи из цилиндрической трубы. Картины течения визуализированы дымом, струя вытекает из трубы слева направо, образующие трубы обозначены горизонтальными линиями. Асимметричность картины относительно оси трубы на первых кадрах вызвана неравномерностью начального распределения плотности дыма,

подаваемого в трубу для визуализации течения. Формирование вихря начинается в момент появления фронта струи из отверстия (кадр 1). По мере подачи струи вихрь отходит от среза отверстия. Передний фронт грибообразной головки вихря представляет собой границу жидкости, находившейся до начала процесса истечения струи в трубе. Из результатов экспериментов следует, что в течение основного времени истечения струи скорость выдвижения переднего фронта струи равна $V_0/2$, т. е. половине скорости струи. Струя, подпитывающая вихрь, сохраняет цилиндрическую форму и после выхода из отверстия, и только при входе в вихрь ее сечение уменьшается (кадры 2-5). Ядро вихревого кольца образуется из слоя перемешивания границы струи, сворачивающегося при входе в вихрь в спиральную поверхность. В вихрь попадает также жидкость, вовлекаемая вдоль границы струи из окружающего пространства. Подача струи прекращается между кадрами 5, 6. К этому времени задний фронт струи совпадает с выходным сечением трубы. В дальнейшем вихрь заполняется жидкостью из хвостовой части струи, находящейся между выходным сечением трубы и вихрем. Следует отметить, что из хвостовой части струи сворачивается вторичное вихревое кольцо, которое в течение некоторого времени движется за основным и вскоре диссипирует. На последнем кадре процесс образования вихревого кольца можно считать практически законченным. Из приведенной кинограммы следует, что практически вся масса выброшенной струи попадает в объем вихревого кольца, а из окружающего пространства вихрь забирает сравнительно небольшое количество жидкости (темные витки). Этим можно объяснить линейный рост объема атмосферы вихревого кольца с увеличением длины струи.

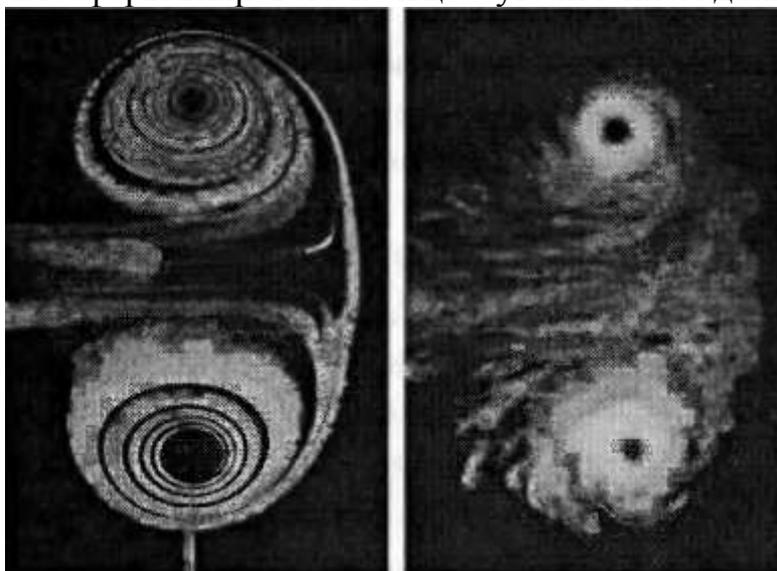


Рисунок 17-6. Слева – число Рейнольдса струи меньше 20000, справа – больше 20000

Из результатов экспериментов с визуализацией течения и результатов измерений параметров вихревых колец следует, что в зависимости от числа Рейнольдса струи формируется два разных типа вихревых колец. Если $Re < 20000$, то образуются ламинарные вихри со слоистой

спиралевидной структурой, сохраняющейся и при дальнейшем движении вихря (рисунок 17.6, слева). Структура вихревых колец, образующихся при больших значениях Re , не является слоистой. Течение в их атмосфере турбулентное (рисунок 17.6, справа). Однако при их визуализации дымом наблюдается резко очерченное тороидальное ядро вихря.

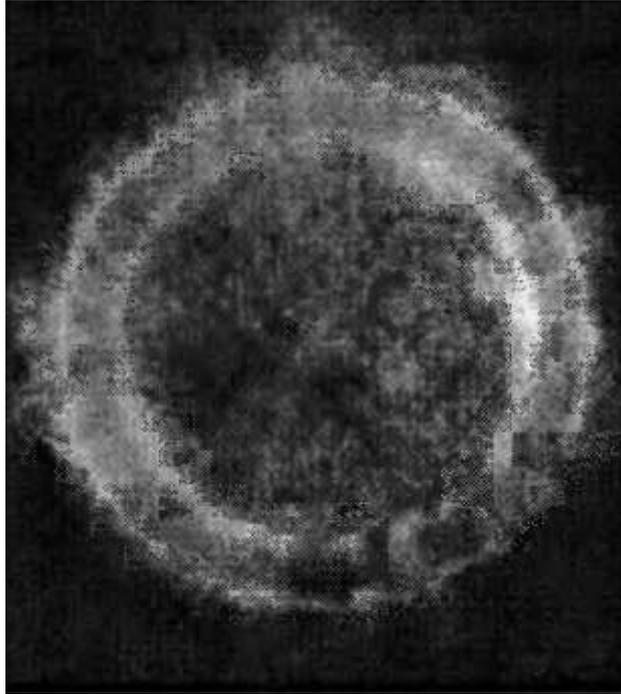


Рисунок 17-7. Вид турбулентного вихря с торца

На рисунке выше турбулентный вихрь показан с торца. Примечательно, что дым вдоль тороидального ядра распределен периодически сгустками, а само ядро состоит как бы из отдельных ячеек, ограниченных поверхностью тора и меридиональными плоскостями. Число ячеек на приведенной фотографии равно 26. Дополнительные исследования показали, что ячеистая дымовая структура существует вне ядра вихря, а внутри оно окрашивается однородно. Сравнение полученной картины с другими известными картинами периодического распределения мелких частиц в жидкости (например, скопление пыли в узлах стоячих звуковых волн в трубе, вихри Тейлора между вращающимися коаксиальными цилиндрами) позволяет предположить, что при определенных числах Re вблизи ядра существует вторичное неосесимметричное течение. Вторичным течением такого типа могут быть радиальные движения жидкости, направленные от ядра и к ядру у соседних стыков ячеек. Очевидно, что в таком случае число ячеек на торе должно быть четным.

18. 2003 год. Алексеенко – Введение в теорию концентрированных вихрей

Динамика двумерных вихревых структур

Взаимодействие двух одинаковых вихрей при разных начальных расстояниях. Результаты расчетов взаимодействия двух вихрей диаметра d с циркуляциями $\Gamma_1 = \Gamma_2$ при разных начальных расстояниях $l=3d$ и $l=1,7d$ представлены на рисунке 18.1. Здесь T -это период вращения соответствующей системы точечных вихрей. При $l=3d$ вихри взаимодействуют как точечные: они вращаются относительно центра завихренности системы без изменения формы с постоянной угловой скоростью. При $l = 1,7d$ картина течения изменяется: вихри заметно деформируются, а их скорость вращения относительно центра завихренности увеличивается, однако процесса объединения не происходит, что согласуется с данными, полученными методом контурной динамики.

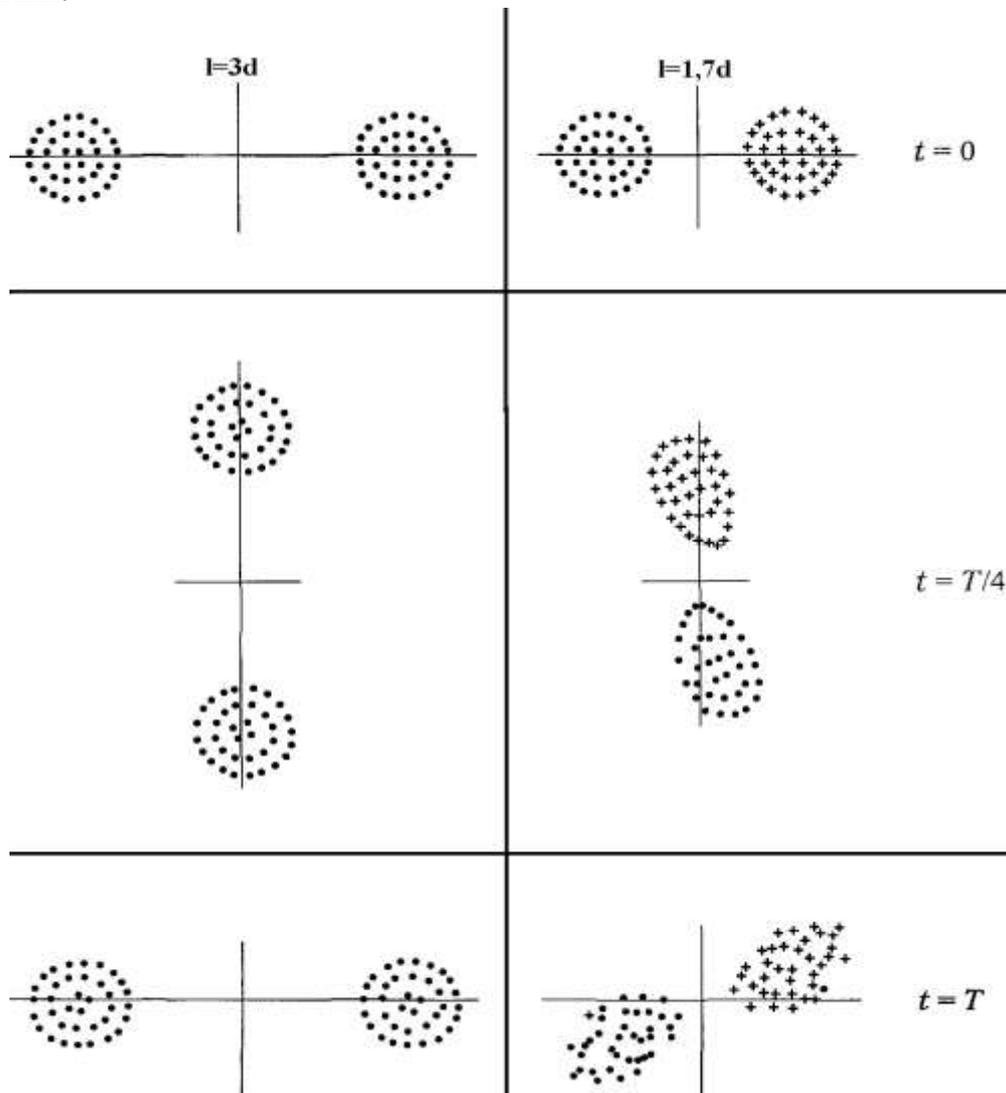


Рисунок 18-1. Примеры дальнего взаимодействия двух одинаковых вихрей

При дальнейшем уменьшении l (рисунок 18.2) процесс взаимодействия становится более интенсивным - начинается обмен частицами. Качественно иная картина процесса начинается с расстояния $l=1,66d$. Уже к моменту времени $t=T/4$ вихри "зацепляются" друг за друга, после чего происходит их объединение и образование единой вихревой структуры. При еще меньшем начальном расстоянии ($l=1,1d$) спаривание вихрей происходит более регулярно и образующаяся вихревая структура более компактна. Взаимодействие вихрей эллиптической формы происходит по тому же сценарию, причем с более близкими значениями "критических" расстояний, при которых начинается обмен частицами или полное объединение вихрей.

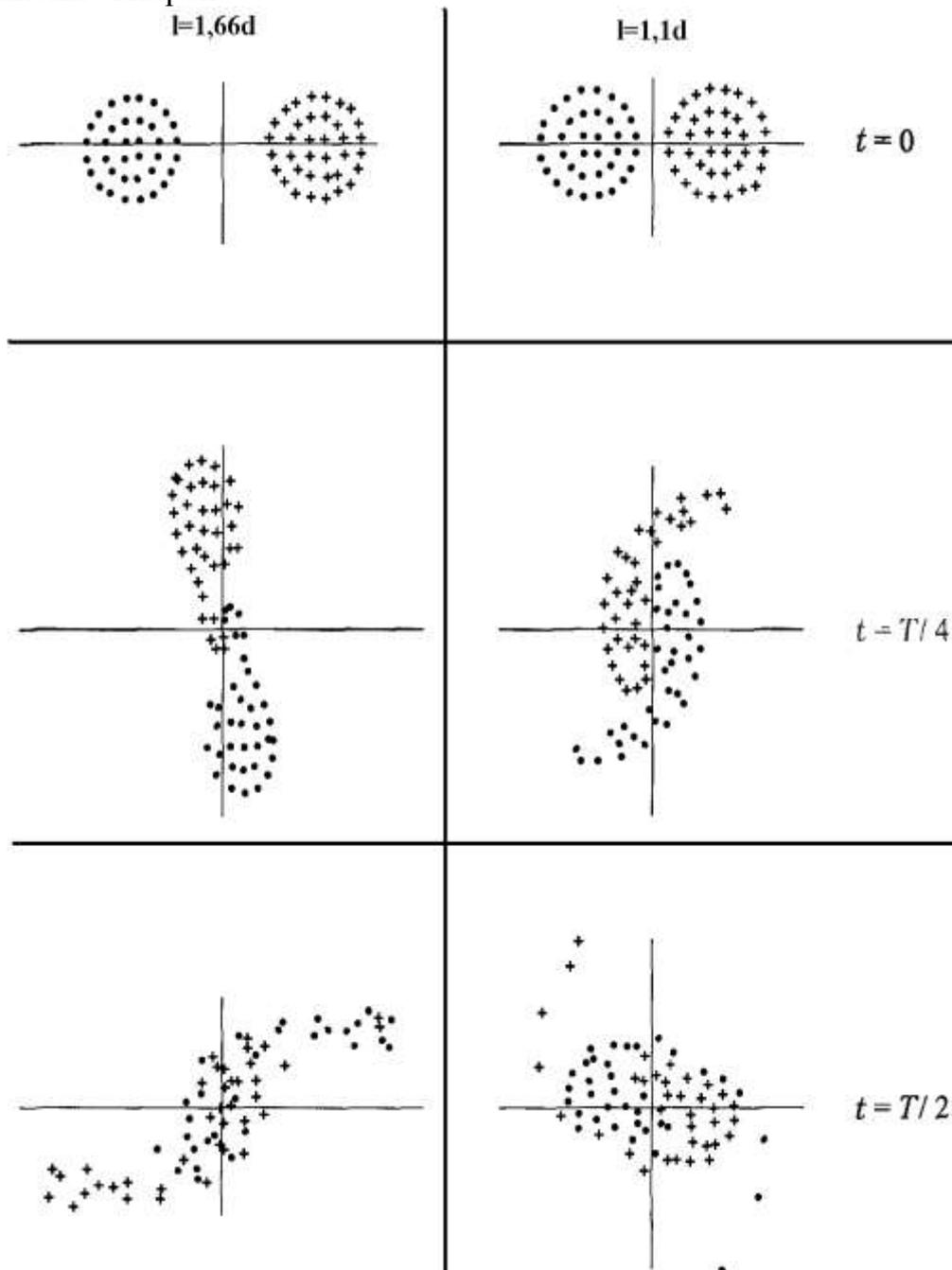


Рисунок 18-2. Примеры ближнего взаимодействия двух одинаковых вихрей

Взаимодействие двух вихрей одного размера, но с разными циркуляциями. Когда начальное расстояние велико, взаимодействие происходит аналогично случаю одинаковых вихрей. При уменьшении l вихрь с меньшей циркуляцией начинает деформироваться, а угловая скорость вращения вихрей относительно центра завихренности оказывается больше, чем для системы двух точечных вихрей с теми же циркуляциями. Если начальное расстояние между вихрями меньше критического, то характер взаимодействия определяется соотношением их циркуляций. При $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ вихрь с меньшей циркуляцией начинает накручиваться на вихрь с большей циркуляцией и разрушаться (рисунок 18.3). Форма вихря с большей циркуляцией при этом остается неизменной. Со временем формируется вихревая структура с ядром, образованным вихрем большей циркуляции, окруженным облаком частиц, принадлежавших ранее вихрю с меньшей циркуляцией. Если же циркуляции вихрей - величины одного порядка, то здесь также вихрь с меньшей циркуляцией начинает накручиваться на более интенсивный вихрь, но при этом последний деформируется и разрушается.

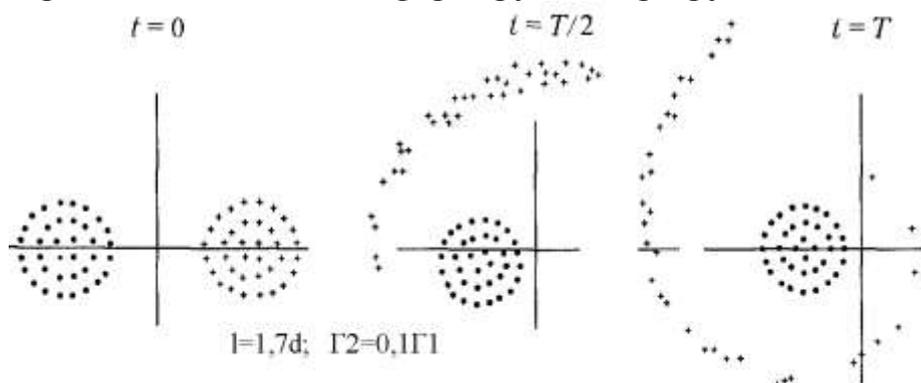


Рисунок 18-3. Взаимодействие двух вихрей разной интенсивности

Взаимодействие двух вихрей с одинаковой циркуляцией, но с разными размерами. Здесь меньший вихрь обладает большей начальной энергией и характер взаимодействия вихрей подобен предыдущему примеру. В общем случае при взаимодействии вихрей с различными циркуляциями и размерами критическое расстояние зависит от соотношения циркуляции и размеров вихрей. Если начальное расстояние между вихрями меньше критического, возможны два механизма образования вихрей большего размера. Первый - это спаривание вихрей, второй - захват вихря, имеющего меньшую начальную энергию, более энергичным вихрем.

Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями одного знака.

При взаимодействии трех вихрей появляются дополнительные механизмы образования вихрей большего размера. Так, система из трех одинаковых вихрей с циркуляциями Γ , расположенных вначале в вершинах равностороннего треугольника со стороной l , при достаточно больших значениях l/d вращается как целое с постоянной угловой скоростью (рисунок 18.4). Аналогичная конфигурация точечных вихрей, как известно, является устойчивой независимо от расстояния между ними.

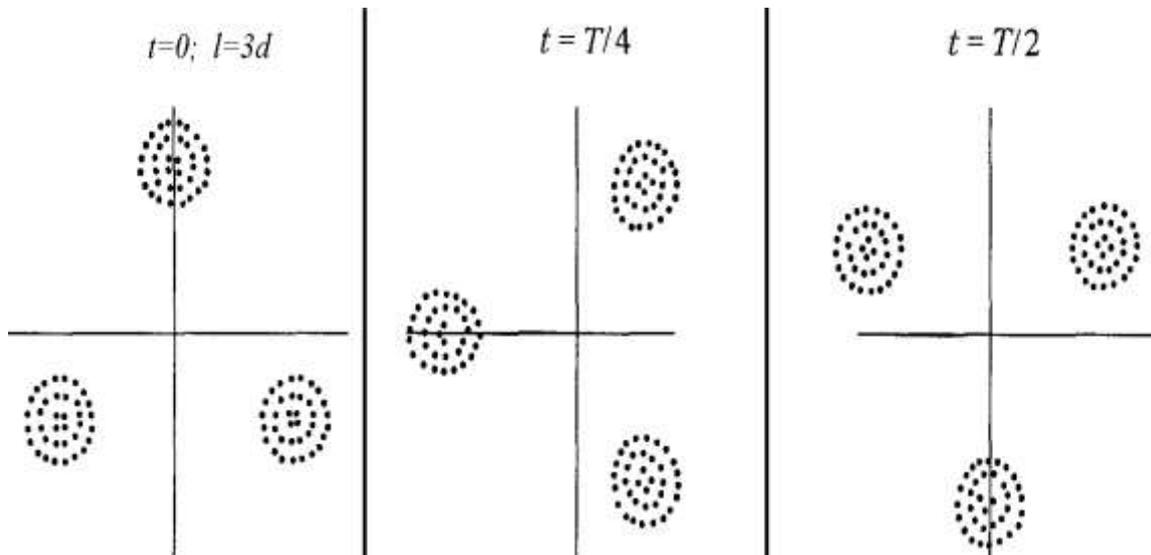


Рисунок 18-4. Дальнее взаимодействие трёх одинаковых вихрей треугольной геометрии

При уменьшении начального расстояния между вихрями конечного размера происходит их деформация, изменяется угловая скорость вращения системы и, начиная с некоторого значения l , вихри теряют устойчивость и объединяются в одну большую структуру (рисунок 18.5).

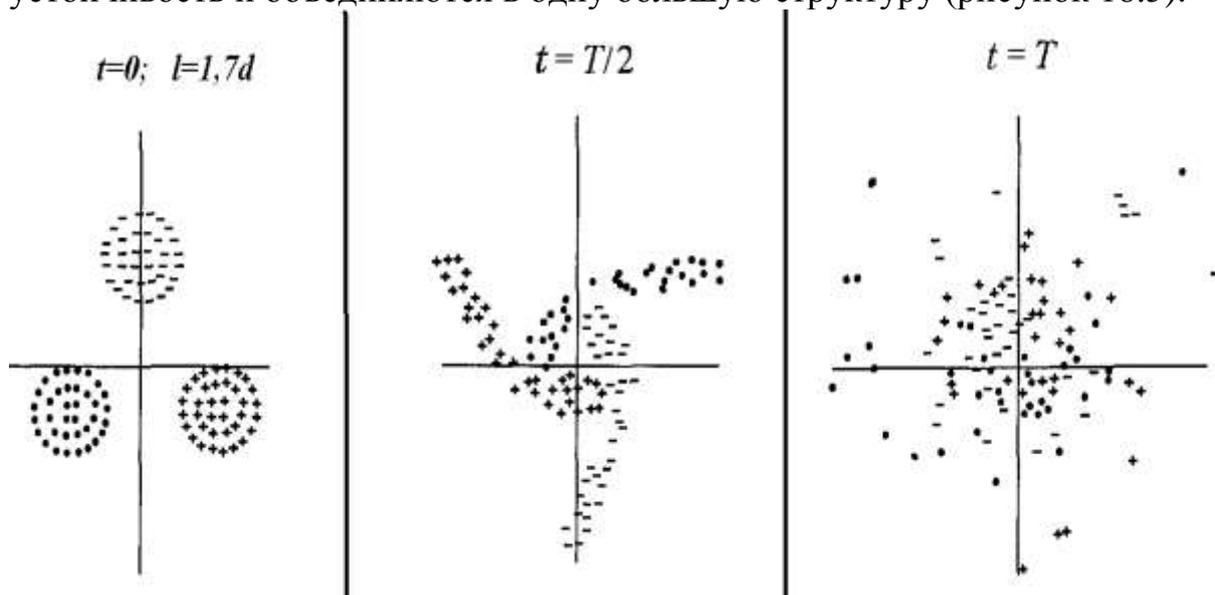


Рисунок 18-5. Ближнее взаимодействие трёх одинаковых вихрей треугольной геометрии

Другой механизм образования вихрей большего размера наблюдается, когда три одинаковых вихря вначале находятся на одной прямой линии на расстоянии “ l ” друг от друга (рисунок 18.6). Соответствующая система точечных вихрей вращается с постоянной угловой скоростью. При большом начальном расстоянии “ l ” вихри взаимодействуют как точечные. Когда же “ l ” меньше критического, то средний вихрь разрывается крайними вихрями. В результате образуются две вихревые структуры. В дальнейшем, в зависимости от начального расстояния, две образовавшиеся структуры могут либо вращаться друг относительно друга, либо спариваться.

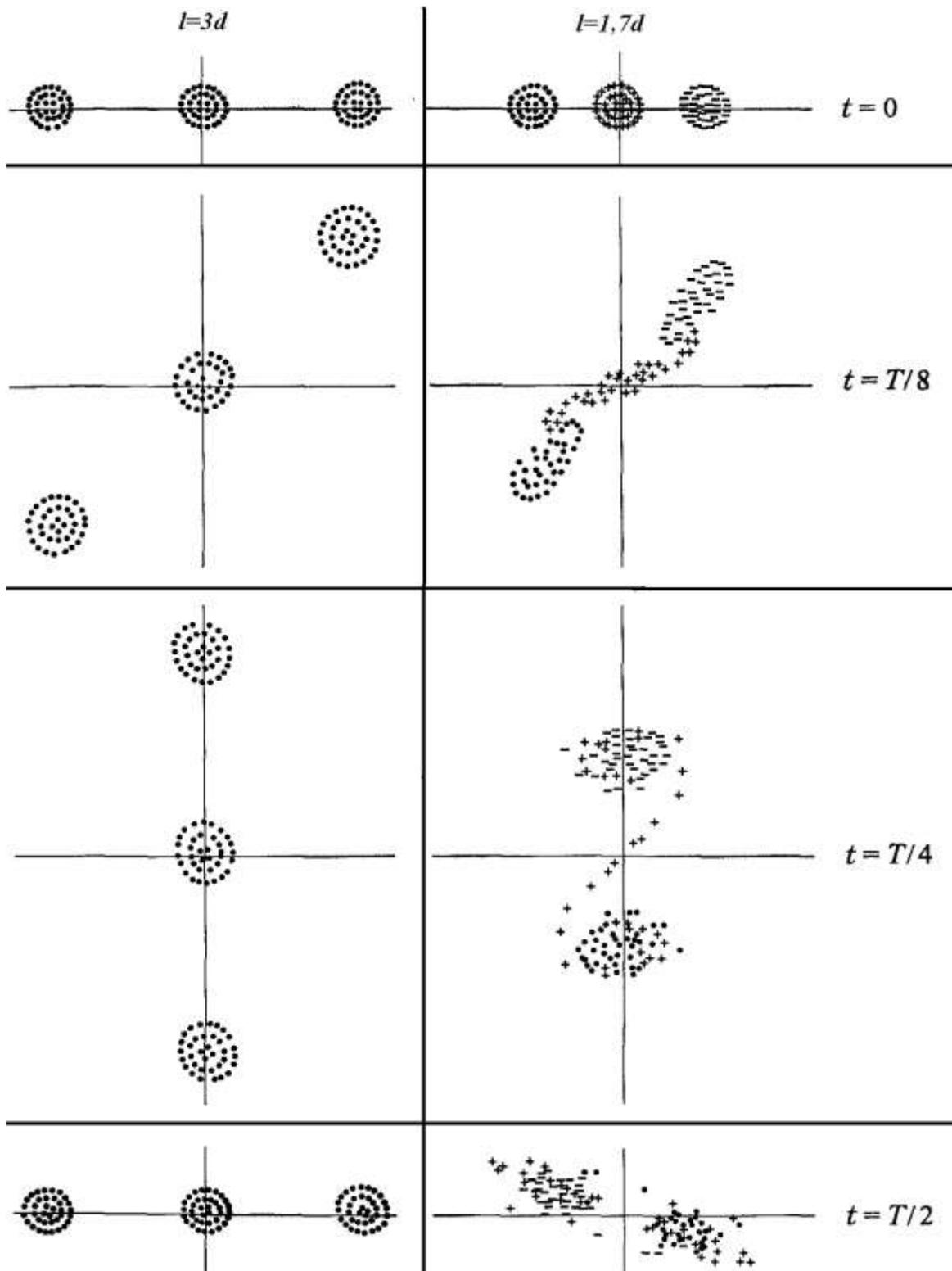


Рисунок 18-6. Взаимодействие трёх одинаковых вихрей в линейном ряду

Если вихри в линейной цепочке трех вихрей имеют различные циркуляции, то более интенсивный вихрь захватывает вихри меньшей интенсивности (рисунок 18.7). В случае, когда менее интенсивный вихрь находится в середине, то более интенсивные крайние вихри разрывают средний, образуя двухвихревую конфигурацию. Дальнейшее увеличение числа вихрей в системе приводит к еще более сложным процессам образования больших вихрей. Тем не менее, эти процессы представляют

собой последовательные комбинации двух основных механизмов: спаривания, строивания и т. д. и роста вихрей за счет захвата или разрыва соседних, менее интенсивных вихрей.

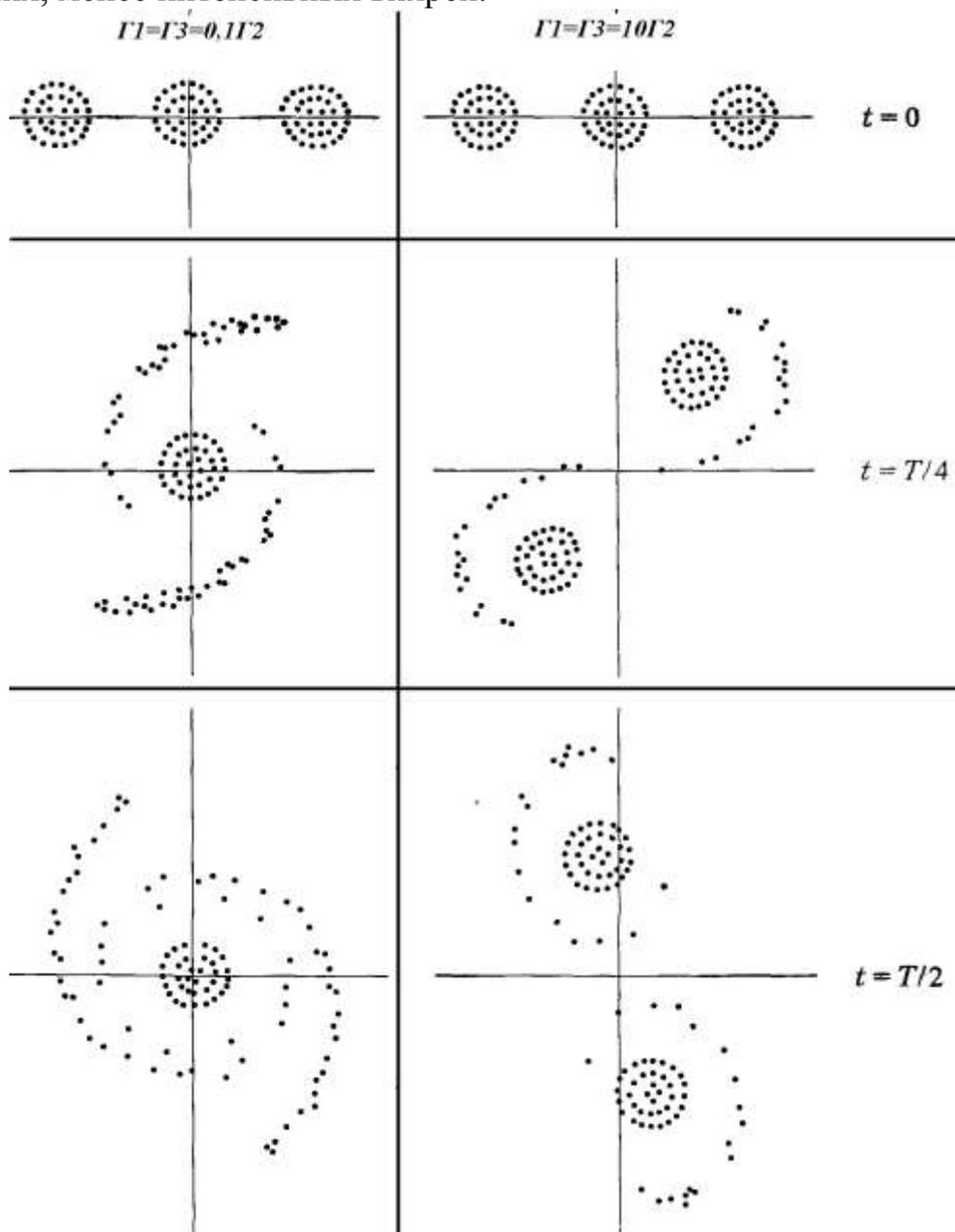


Рисунок 18-7. Взаимодействие в линейном ряду трёх вихрей с разной циркуляцией

Взаимодействие двух вихрей с циркуляциями разных знаков.

Если два вихря имеют равные по величине и противоположные по знаку циркуляции и находятся первоначально достаточно далеко друг от друга, то они движутся затем в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей их центры, без изменения формы с постоянной скоростью $V = \Gamma/2l$, т. е. ведут себя как пара точечных вихрей. Уменьшение расстояния между вихрями приводит лишь к их деформации и увеличению скорости поступательного движения. На рисунке 18.8 показано взаимодействие двух одинаковых вихрей противоположных знаков для $l=1,1d$.

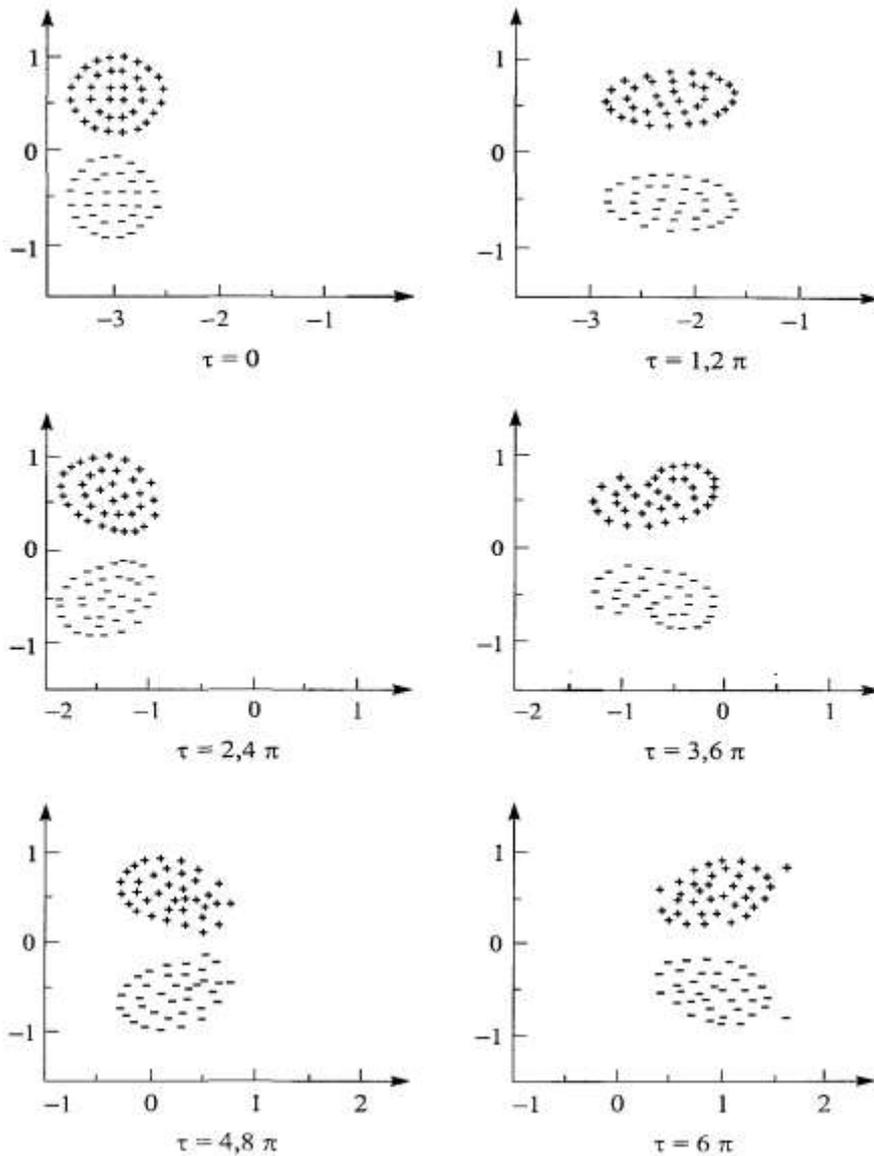


Рисунок 18-8. Взаимодействие двух одинаковых вихрей разной полярности

Если циркуляции вихрей не только по знаку, но и по абсолютным значениям отличны друг от друга, то при большом начальном расстоянии вихри движутся по круговым орбитам вокруг центра завихрённости системы, который лежит на линии, проходящей через центры вихрей позади более интенсивного вихря (рисунок 18.9). При значениях Γ меньше критических более интенсивный вихрь может захватывать часть вихря с меньшей циркуляцией.

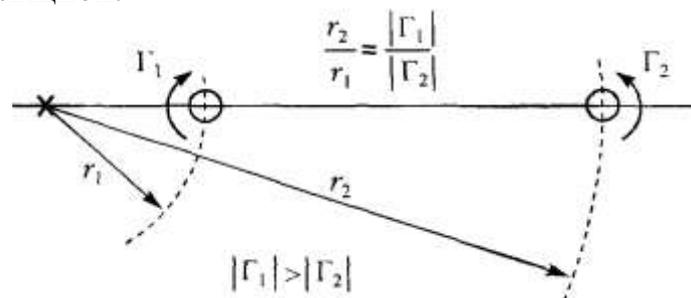


Рисунок 18-9. Взаимодействие двух вихрей разной полярности и с разной циркуляцией

Экспериментальное наблюдение вихрей в аппаратах

Концентрированные вихри наблюдаются в самых разнообразных устройствах и при самых различных условиях. В экспериментальном плане их удобнее всего изучать в вихревых камерах с регулируемыми геометрическими и режимными параметрами. Всякая вихревая камера состоит из собственно рабочего объема и закручивающего устройства. Но часто закрутка потока осуществляется непосредственно в рабочем объеме. Из всего многообразия закручивающих устройств выделим наиболее типичные конструкции, часть из которых применялась в наших экспериментах. Эти устройства можно разбить на два основных класса - тангенциальные (рисунок 18.10 а-д, рисунок 18.11) и аксиальные (рисунок 18.10е) вихрегенераторы. Существуют и комбинированные схемы.

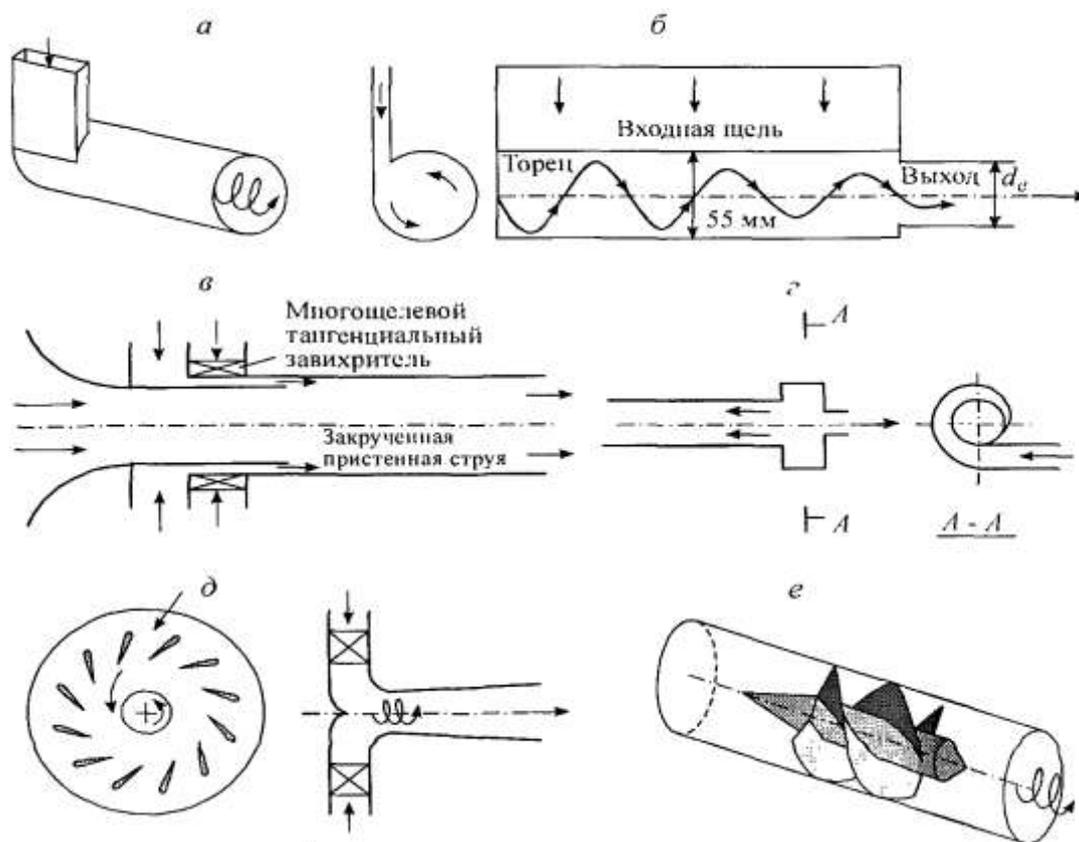


Рисунок 18-10. Схемы устройств для закрутки потока

В тангенциальных схемах на входе в вихревую камеру потоку сообщается только окружная компонента скорости. При этом вектор скорости направлен по касательной к цилиндрической поверхности канала или некоторой условной окружности диаметра d . Наиболее распространенным завихрителем тангенциального типа является цилиндрический канал с тангенциальным патрубком (рисунок 18.10а). В качестве входного патрубка могут быть использованы щель (рисунок 18.10б), круглое или прямоугольное сопла, несколько щелей или сопел (рисунок 18.11). Более совершенной конструкцией является завихритель со спиральным подводом - улиткой (рисунок 18.10г). В тангенциальном лопаточном завихрителе

(рисунок 18.10д) окружное направление потоку сообщается посредством круговой решетки лопаток с изменяемым углом наклона к радиальному направлению из центра камеры. Поворот потока от радиального к осевому направлению осуществляется профилированной вставкой. Осевые лопаточные завихрители представляют собой кольцевую решетку из плоских или криволинейных лопаток, расположенных под углом к набегающему потоку непосредственно в рабочем участке. Закрутка потока в рабочем участке может быть осуществлена с помощью шнекового (рисунок 18.10е) или ленточного завихрителя.

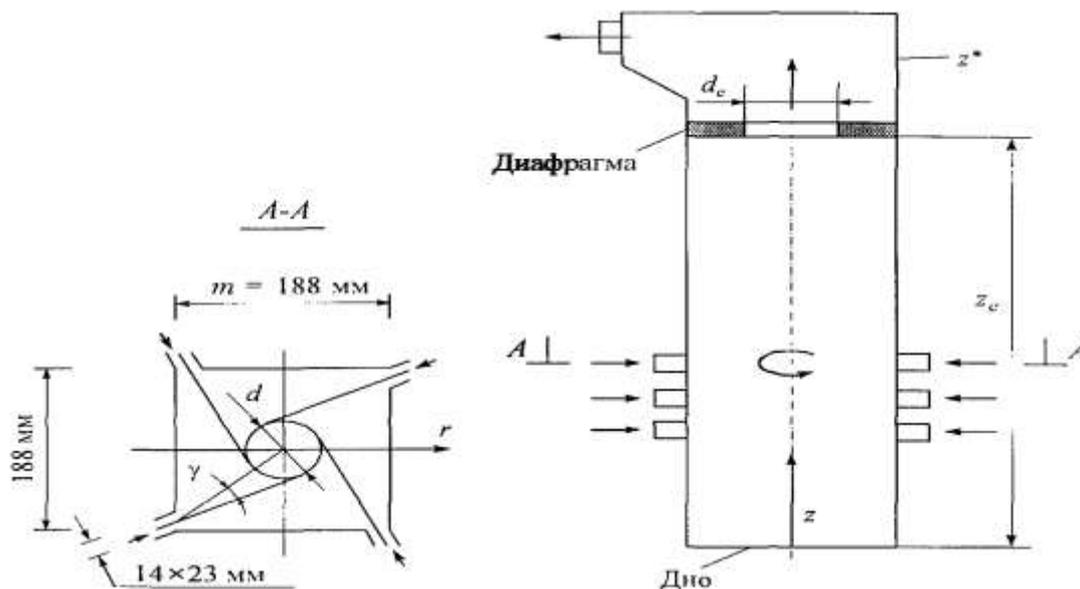


Рисунок 18-11. Схема прямоугольной гидравлической камеры

На рисунке 18.11 показана схема вихревой камеры, применяемой в основном в наших работах. Рабочий участок изготовлен из оргстекла и представляет собой вертикальную камеру квадратного сечения с размерами 188x188x600мм. Прямоточные прямоугольные сопла с выходным сечением 14x23мм расположены в три яруса и объединены в угловые блоки. Ось сопла смещена от угла камеры на 15мм. Угол поворота у каждого из сопел регулируется в горизонтальной плоскости в пределах от 0 до 35°. Закрученное течение организовывалось путем направления осей сопел по касательной к некоторой условной окружности с диаметром d и центром на оси канала. Таким образом реализовалась тангенциальная схема закрутки потока. В циклонно-вихревых камерах наиболее существенное влияние на структуру потока оказывают условия на выходе и на заглушённом торце камеры. В частности, концентрированный вихрь типа вихревой нити наблюдается в камере с диафрагмированным выходом. В тангенциальной модели геометрические условия менялись путем изменения угла поворота сопел и формы дна (торца), диафрагмирования выхода и смещения выходного отверстия. Хотя применяемая в эксперименте вихревая камера не является каноническим объектом из-за квадратной формы поперечного сечения, тем не менее, она оказалась весьма подходящей для изучения разнообразных вихревых структур. Более

того, с помощью цилиндрических вставок было показано, что в режимах с концентрированными вихрями картины течения в приосевой области цилиндрического и прямоугольного каналов практически не отличаются друг от друга. В качестве рабочей жидкости использовалась вода. Визуализация течения осуществлялась мелкими пузырьками воздуха. В ходе эксперимента измерялись распределения статического давления на стенках и в потоке, а также поля скоростей. Приемниками давления на стенке служили отверстия диаметром 0,4мм, а в потоке использовались стандартные напорные трубки диаметром 1,4мм. Регистрация давления осуществлялась тензорезисторными преобразователями, разработанными в Институте теплофизики СО РАН. Профили тангенциальной и аксиальной компонент скорости измерялись тремя способами: стандартными напорными трубками диаметром 1,4мм (вдали от оси вихря); методом стробоскопической визуализации частиц и электродиффузионным методом. Для регистрации динамического давления использовались различные типы насадок, с помощью которых можно было измерять одну, две, три компоненты скорости. В указанных экспериментах с помощью дифференциальной трубки с коническим срезом определяли направление вектора скорости в плоскости, а дифференциальной трубкой Пито, ориентированной по измеренным углам наклона вектора скорости, - значение полной скорости. Метод стробоскопической визуализации заключается в регистрации частиц меток при стробоскопическом освещении потока короткими импульсами света. В качестве частиц использовались мелкие пузырьки воздуха диаметром 20-30мкм. Источником света служила импульсная лампа-вспышка. Электронный стробоскоп, созданный в Институте теплофизики СО РАН, выдавал на лампу-вспышку серию электрических импульсов с регулируемым интервалом времени и регулируемым количеством (от двух до шести). Ширина светового импульса составляла 20мкс, а точность выдерживания временного интервала между вспышками 0,5мкс. Принцип определения скорости основан на измерении перемещения маленьких частиц, отслеживающих движение потока, за определенный период времени, задаваемый стробоскопом.

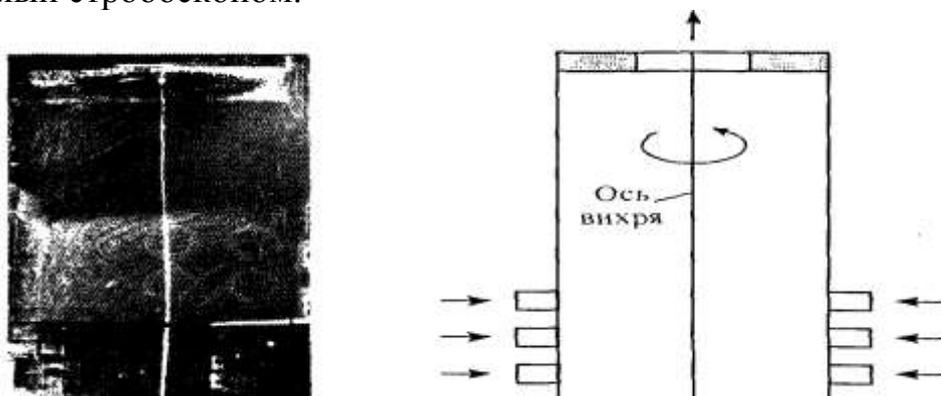


Рисунок 18-12. Формирование вихря со структурой вихревой нити

Рассмотрим случай, когда формируется течение со структурой типа вихревой нити. Визуализация течения в таком режиме и его схема представлены на рисунке 18.12. но. Визуализация производится мелкими пузырьками воздуха при боковом освещении. Резкое увеличение местной окружной скорости жидкости в центре камеры сопровождается резким падением давления. Благодаря последнему эффекту на оси вихря возникает кавитационная область, представляющая собой тонкую воздушную непрерывную нить постоянной толщины с диаметром до 0,1мм. Воздушная нить формируется из мелких пузырьков воздуха, добавленных в жидкость с целью визуализации потока, и простирается от дна канала до отверстия диафрагмы (и дальше). С ростом газосодержания толщина воздушной полости возрастает до 5-10 мм, нить становится неоднородной - тоньше у дна и толще к выходу, но течение остается устойчивым. Такую структуру можно рассматривать как полый вихрь. На рисунке 18.13 представлена визуализация течения в поперечном сечении камеры. Как видно, траектории частиц близки к круговым, что свидетельствует об осесимметричности закрученного потока в приосевой зоне даже при наличии квадратного сечения камеры.



Рисунок 18-13. Визуализация течения в поперечном сечении камеры

Как для любого другого вязкого течения, основным режимным параметром потока в вихревой камере является число Рейнольдса, равное отношению расхода жидкости к произведению площади поперечного сечения камеры на кинематическую вязкость:

$$Re = Q / (\Sigma \cdot \nu)$$

Чтобы охарактеризовать степень закрутки потока в вихревой камере, вводят дополнительный параметр - параметр крутки S . Существуют разнообразные способы определения этого параметра. Наиболее простые выражения - это отношения максимальной тангенциальной скорости к максимальной осевой или осредненной тангенциальной скорости к осредненной осевой. Многочисленные исследования закрученных потоков показали, что число Рейнольдса и параметр крутки не характеризуют однозначно режим течения. В частности, существенную роль играют условия на выходе и на заглушённом торце камеры. Так, при одних и тех же значениях расхода Q и параметра крутки S , но разных граничных условиях наблюдалась совершенно различная структура течения в вихревой камере. Это вихри:

а) прецессирующий (плоское дно; открытый выход в камере);
 б) колоннообразный (плоское дно; центральное выходное отверстие);
 в) винтовой (наклонное дно или смещенное выходное отверстие);
 г) два переплетенных (двускатное дно; центральное выходное отверстие).

Из анализа перечисленных режимов следуют два важных факта. Во-первых, число Re и параметр крутки S не характеризуют однозначно структуру течения. Во-вторых, наблюдаемые вихревые структуры обладают винтовой симметрией, что означает наличие пространственного периода по оси z . Альтернативным подходом для потоков с винтовой симметрией является введение двух новых параметров. Они представляют собой шаг винта $h = 2\pi l$ (или просто l) и скорость однородного потока.

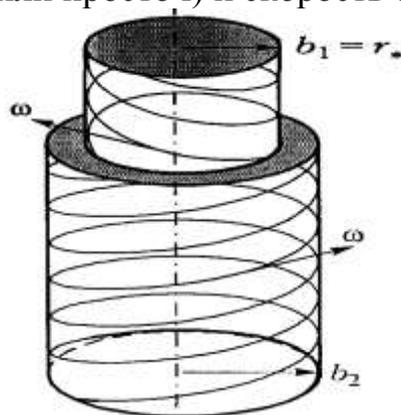


Рисунок 18-14. Композиция двух колоннообразных вихрей

Качественно новая вихревая структура появляется в камере при увеличении отверстия диафрагмы. Довольно сложное поведение распределений компонент скорости можно промоделировать путем композиции нескольких простых вихрей. Такому составному вихрю соответствуют непересекающиеся кольцевые области. Пример композиции двух вихрей с прямолинейными осями показан на рисунке 18.14. Здесь первому вихрю соответствует цилиндрическая область радиуса b_1 , внутри которой завихренность постоянна, а вектор завихренности направлен под некоторым углом к оси z (левый вихрь). Второй вихрь характеризуется кольцевой областью с радиусами b_1 и b_2 , внутри которой завихренность также постоянна, но вектор завихренности ориентирован иначе (правый вихрь). Результирующее поле скоростей, в силу линейной связи между завихренностью и скоростью, определяется как сумма вкладов от двух завихренных областей.

19. 2003 год. Ацюковский – Общая эфиродинамика

Краткая история теории вихревого движения

Начало теории вихревых движений положил Гельмгольц, опубликовавший в 1858г. свой мемуар «Об интеграле гидродинамических уравнений, соответствующих вихревому движению», в котором он впервые сформулировал теорему о сохранении вихрей. Согласно этой теореме, при силах, удовлетворяющих закону сохранения энергии, невозможно создать или уничтожить уже существующий вихрь и, более того, невозможно даже изменить напряжение последнего. Зарождение и угасание вихрей, наблюдаемые в природе, целиком определяются пассивными силами трения. Только благодаря этим силам осуществляется вихрь, и они же заставляют зародившийся вихрь потухать. Интегралы гидродинамических уравнений, из которых как следствие вытекает теорема о сохранении вихрей, были получены еще в 1815г. Коши. Но Коши интересовала лишь аналитическая сторона дела. Геометрическая же интерпретация его результатов принадлежит Гельмгольцу. Только после этого возникла та группа вопросов и задач, которые теперь составляют предмет учения о вихрях. Однако нельзя не упомянуть, что частные случаи теоремы о сохранении вихрей были уже известны Лагранжу. В своей «Аналитической механике», опубликованной в 1788г., он доказывает, что движение идеальной жидкости, обладая потенциалом скоростей в какой-либо момент времени, остается таковым за все время движения. Далее Коши и Стокс доказывали, что всякая частица идеальной жидкости никогда не получает вращения от окружающей среды, если не обладала им в начальный момент времени. В 1839г. шведский ученый Свенберг доказал следующую теорему: угловые скорости вращения частиц в различных положениях ее на траектории всегда обратно пропорциональны квадратам расстояния её от траектории движения. Отсюда заключение: частица жидкости, получив в какой-либо момент угловую скорость, никогда не перестанет вращаться и, наоборот, частица жидкости не будет вращаться, если в начале движения её угловая скорость была равна нулю. В указанном выше мемуаре Гельмгольца принцип сохранения вихрей был обоснован во всей полноте. Более того, там же указано правило определения скоростей движения вихревых шнуров, находящихся в идеальной несжимаемой жидкости, и тех частей жидкой массы, где отсутствуют вихри. Им же указана аналогия между скоростями движения частиц жидкости и силами действия гальванических токов на магнитный полюс. Все последующие работы, появившиеся после 1853г., по существу являются расширением и обобщением основных результатов, добытых Гельмгольцем. Итальянский ученый Бельтрами, пользуясь теоремами, выведенными Гельмгольцем, дал правило определения скоростей частиц сжимаемой жидкости, находящейся в вихревом движении и замкнутой конечным объемом. Это правило, устанавливающее электродинамические аналогии, известно как

теорема Бельтрами. Крупный шаг вперед после Гельмгольца сделал Кирхгоф. В своих «Лекциях по математической физике» он дал дифференциальные уравнения движения прямолинейных и параллельных вихревых шнуров, находящихся в неограниченной массе несжимаемой жидкости. Он же указал четыре интеграла этих уравнений. Основываясь на уравнениях Кирхгофа, Гребль в 1877г. решил несколько задач о плоском движении трех, четырех и $2n$ вихрей. Задачу о движении четырех вихрей Гребль ограничивает существованием в расположении вихрей плоскости симметрии; движение $2n$ вихрей ограничивает предположением существования в расположении вихрей n плоскостей ортогональной симметрии. Два года спустя после работы Гребля появилась работа Коотса (Cootes), в которой он рассмотрел движение вихревого кольца и показал, что кольцеобразная форма вихря – форма устойчивая. Изучением движения вихревых колец много занимался также Дж.Томсон. Вихревым движениям в сжимаемой жидкости посвящены работы Гретца и Шре. Движение вихрей, ограниченных стенками, изучал сам Гельмгольц. Рассматривая движение двух прямолинейных параллельных вихрей в идеально несжимаемой жидкости, Гельмгольц показал, что плоскость, делящая расстояние между двумя вихрями с равными по величине напряжениями, но разными по знаку, может приниматься за стенку, если она перпендикулярна к указанному расстоянию. Вихрь будет двигаться параллельно этой стенке, и весь эффект стенки сводится, таким образом, к эффекту, происходящему от изображения вихря, если стенку рассматривать как зеркало. Гринхилл в 1877–1878 гг. рассмотрел задачи о движении вихрей в жидкости, ограниченной цилиндрическими поверхностями. Пользуясь методом изображений, он решил задачи о плоском движении одного и двух вихрей внутри и вне поверхности круглого цилиндра, а также в пространстве, ограниченном поверхностью прямоугольной четырехугольной призмы. В 1876–1883 гг. английский физик О.Рейнольдс экспериментально установил критерий перехода ламинарного течения в цилиндрических трубах в турбулентное и ввел критерий, характеризующий критическое соотношение между инерционными силами и силами вязкости, при определенном значении которого ламинарное течение переходит в турбулентное и далее в вихревое. Это соотношение

$$Re = \rho v l / \eta,$$

названное «числом Рейнольдса», связывает ρ –плотность жидкости, v –скорость потока, l –характерный линейный размер, η – динамический коэффициент вязкости и позволяет определить условия образования турбулентностей и вихрей в конкретных случаях течений жидкостей вблизи различных поверхностей и форм. В это время рядом ученых были решены многочисленные частные задачи вихревого движения. Совершенно особую задачу поставил перед собой в 1894г. Н.Е.Жуковский, который, пользуясь методом конформного изображения, решил задачу о движении вихря вблизи острого клина, погруженного в жидкость.

Рассматривая траектории вихря, он показал, что вихревой шнур всегда уклоняется от подносимого к нему ножа. Впоследствии Жуковский разработал теорию так называемых «присоединенных» вихрей, имеющую фундаментальное значение для многих приложений. В.Томсон, основываясь на теореме о сохранении вихрей, выдвинул особую атомистическую гипотезу. Он предположил, что все пространство Вселенной заполнено эфиром – идеальной жидкостью, в которой атомы материи представляют собой бесконечно малые замкнутые вихри, зародившиеся в этой жидкости. Разнообразие в свойствах атомов В.Томсон объяснил многообразием движений, в котором находятся частицы одного простого вещества. Вихревая теория атомов, созданная В.Томсоном, не получила признания и развития. Только в 20-х годах XX столетия немецкий гидродинамик А.Корн попытался вновь воскресить идеи В.Томсона, но применительно не к атомам вещества, а к толкованию природы электрона. Несколько позже Кастерин сделал попытку построения вихревой теории элементарных частиц. Однако идеи Корна и Кастерина были встречены с большим недоверием широкой научной общественностью, вследствие чего они оказались изолированными и не востребованными, хотя в работах этих ученых содержится немало число интересных соображений. С развитием авиации ученые натолкнулись на необходимость изучения вихревых образований при обтекании твердых тел. В этом отношении особого внимания заслуживают работы Кармана и Н.Е.Жуковского. Первый весьма подробно изучал поведение так называемой вихревой дорожки Кармана. Имеются замечательные произведения Фридмана на русском языке «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», а также «О вихрях в жидкости с меняющейся температурой», в которых дана постановка задач о движении вихрей в сжимаемой жидкости. Наконец, следует упомянуть об исследованиях Озеена, который впервые поставил и решил ряд задач о движении вихрей в вязкой жидкости. Идеи Озеена и Фридмана еще ждут своего продолжения. В более позднее время рядом советских и зарубежных исследователей теоретические изыскания в области вихревого движения были продолжены. Следует отметить, что сложность задач турбулентной и вихревой газовой динамики часто заставляет исследователей использовать упрощенные модели явлений, не всегда корректные. Например, в жидких вихрях использовано представление о том, что центральная часть линейного вихря вращается по закону твердого тела, хотя никаких физических предпосылок для этого нет. Во многих случаях используются модели, не отвечающие физике явлений, пренебрегается сжимаемостью газа там, где пренебречь этим нельзя, не исследуются вязкостные, температурные и другие эффекты. Многие задачи вихревого движения сред, и в особенности, газов не решены до сих пор. К ним следует отнести, в первую очередь, проблему образования, структур и энергетики газовых вихрей. Далеко не в удовлетворительном состоянии находится теория пограничного слоя, хотя здесь многое

сделано. Практически полностью отсутствуют решения в области взаимодействия винтовых газовых потоков. Никогда не рассматривались задачи, связанные с взаимопроникновением вихревых потоков в разреженных газах, с взаимодействием сверхплотных газовых структур типа винтовых вихревых тороидальных колец или взаимодействием сложных винтовых вихревых структур, состоящих из многих вихрей.

Образование и структура линейного газового вихря

При перемещении масс газа относительно друг друга в газовой среде возникают турбулентности, переходящие в вихревые образования. Принципиально вихревым образованием является любое движение жидкости или газа, для которого циркуляция скорости по замкнутому контуру не равна нулю. Однако, далеко не всякое движение, для которого выполняется приведенное соотношение, является вихрем в полном смысле этого слова. В самом деле, течение газа вдоль неподвижной стенки неодинаково на разных расстояниях от нее. Тем не менее, вихря как такового при подобном течении может и не быть, хотя предпосылки для появления турбулентности созданы именно благодаря разностям скоростей течения на разных расстояниях от стенки.

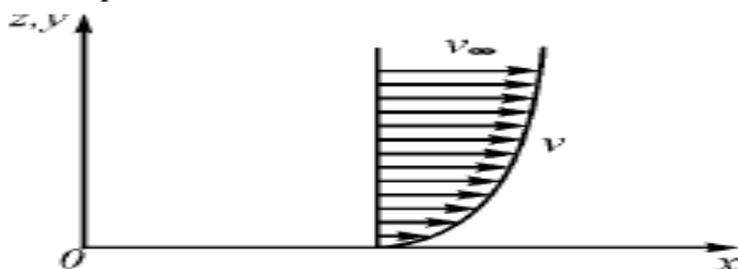


Рисунок 19-1. Распределение скоростей вблизи плоской пластины

В гидромеханике, как известно, принято различать ламинарное, турбулентное и вихревое движения, переход от одного из них к другому определяется числом Рейнольдса. Переход от ламинарного движения к турбулентному начинается от значений чисел Рейнольдса порядка 2000 (по исследованиям самого Рейнольдса от 2300), однако возникающие турбулентности не обязательно сопровождаются поворотом (вращением) частиц среды. При более высоких значениях числа Рейнольдса турбулентность становится устойчивой. Если же при таких значениях чисел Рейнольдса происходит поворот частиц среды, то движение становится вихревым. При движении потоков газа относительно других потоков или покоящихся масс на границах потоков возникает пограничный слой, в котором возникает градиент скоростей. Экспериментальным подтверждением снижения температуры в пограничном слое является широко известный факт оледенения поверхностей крыльев летящего самолета. Центробежная сила, стремящаяся отбросить газ, находящийся в пограничном слое, в установившемся движении должна быть уравновешена силой, которая возникает из-за разности давлений внешней среды и слоев, находящихся в

области, располагающихся ближе к центру вращения. Отброс центробежной силой газа из центральной области вихря на периферию способствует тому, что газовый вихрь формируется как вращающаяся труба, в стенках которой размещается основная масса вихря.

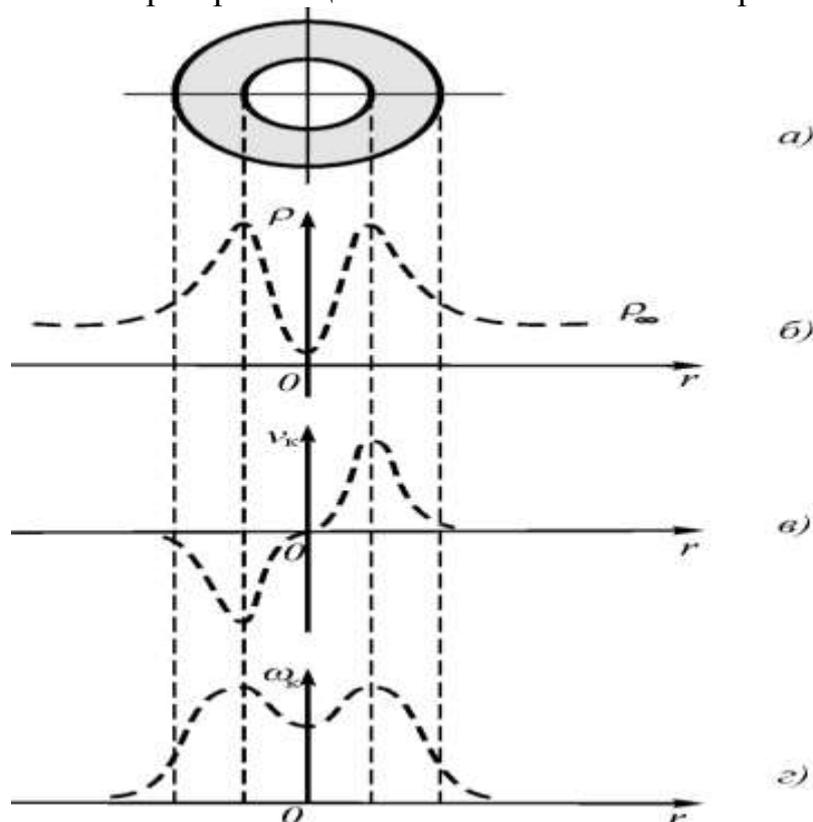


Рисунок 19-2. Поперечное сечение вихря, эпюры плотности, касательной и угловой скорости

Проведенные на специально созданном стенде работы по изучению условий появления вихрей на входе воздухозаборников реактивных самолетов при запуске двигателя, показали, что линейный газовый вихрь действительно представляет собой образование типа трубы с уплотненными стенками. Диаметр установившегося на входе в воздухозаборник турбины вихря существенно, в десятки раз по диаметру и в сотни раз по площади поперечного сечения, меньше соответствующих размеров воздухозаборника а сам вихрь имеет трубчатую структуру. Элемент газа, находящийся на внешней стороне трубы, стремится под действием внутреннего давления и центробежной силы оторваться, этому препятствует внешнее давление. Если внутренние силы превышают внешние, элемент газа оторвется от трубы, так как для газа никаких препятствий к этому нет. Сумма внутренних сил оставшегося в стенках газа оказывается меньше внешних сил или равна им, – последнее состояние является неустойчивым. Сжатие тела вихря внешними силами (давлением среды) вызывает увеличение скорости вращения, причем внутреннее давление при этом падает, так что равновесие остается неустойчивым и вихрь продолжает сжиматься, пока не установится баланс сил.

Энергетика газовых вихрей

Как видно из предыдущего раздела, тело газового вихря сжимается окружающей средой в процессе формирования вихря. Подтверждением этого служит тот факт, что тело смерча является более тонким, нежели его основание, где трение о почву не позволяет ему развить большую скорость вращения. Другим подтверждением сжатия тела вихря атмосферой служит то, что на стоянке при запуске турбореактивных двигателей самолетов перед воздухозаборниками часто образуется вихрь, причем единственный. Площадь поперечного сечения этого вихря в сотни раз меньше площади самого воздухозаборника, и если вне вихря течение воздуха в воздухозаборник практически отсутствует, то скорость продольного течения воздуха в самом вихре весьма большая; практически весь воздух в турбину идет через этот вихрь, образовавшийся самопроизвольно на входе в компрессор. Таким образом, факт самопроизвольного уменьшения площади поперечного сечения вихря в процессе его формирования реально имеет место. Уменьшение площади поперечного сечения вихря, естественно, есть результат уменьшения его радиуса. Таким образом, формирование вихря сопровождается уменьшением его радиуса с одновременным уплотнением тела вихря. В механике пример движения тела с переменным радиусом – движение вокруг неподвижного центра при изменении радиуса за счет поступления энергии извне. Здесь, для того чтобы уменьшить радиус траектории, нужно совершить дополнительную работу по преодолению центробежной силы. Тогда масса начнет двигаться по спирали, и при этом угол между нитью и траекторией будет меньше прямого угла. Общее движение тела происходит по кривой, при этом проекция центробежной силы на направление движения не равна нулю, и тело приобретает ускорение вдоль траектории. Для постоянной массы $mvr = \text{const}$, откуда следует, что при $r_2 < r_1$

$$p_2 = mv_2 > p_1 = mv_1; \quad w_2 = \frac{mv_2^2}{2} > w_1 = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Таким образом, закон постоянства момента количества движения справедлив, если в системе за счет внешних источников изменяется энергия, направленная на соответствующее изменение радиуса вращения тела. Тангенциальная скорость движения тела при уменьшении радиуса вращения окажется существенно больше первоначальной и будет определяться выражением, полученным из условия постоянства момента количества движения:

$$u_k = \frac{r_0}{r_k} u_0.$$

То же самое должно быть и в случае формирования вихревого движения газа (сжимаемой жидкости): чем более сжат вихрь, тем больше будет скорость движения потоков. Это же должно иметь место и в структуре сформированного вихря; внутренние слои должны двигаться со скоростью

большой, чем внешние слои. Энергия тангенциального движения, приобретенная массой за единицу времени, равна

$$w_t = \frac{F_t \Delta S_t}{\Delta t} = m a_t v_t = m \frac{v_t^2 v_r}{r} = m \omega v_t v_r = m \omega^2 v_r r.$$

Энергия, вложенная в радиальное перемещение тела за ту же единицу времени, составляет

$$w_{\text{ра}} = \frac{F_{\text{ра}} \Delta S_{\text{ра}}}{\Delta t} = m a_{\text{ра}} v_{\text{ра}} = m \frac{v_t^2 v_r}{r}, \quad w_t = w_{\text{ра}}$$

Сила, ускоряющая массу, пропорциональна угловой скорости и скорости изменения радиуса:

$$F_t = \frac{v_t v_r}{r} = m \omega v_r$$

Сила, которую нужно приложить к массе в радиальном направлении, составляет:

$$F_r = \frac{v_t^2}{r} = m \omega^2 r.$$

Это полная сила, а энергия, направленная на преодоление этой силы при перемещении тела и есть вся энергия, которую нужно вложить в систему для обеспечения сокращения радиуса и приобретения массой дополнительной энергии вращения. Это справедливо для случая вращения не только твердого тела, но и несжимаемой жидкости, когда энергия радиального движения тратится только на изменение радиуса вращения и соответственно на изменение энергии тангенциального движения. В случае же сжимаемого газа энергия радиального движения тратится еще и на изменение внутренней энергии газа за счет его сжатия. Однако здесь общая картина становится существенно сложнее. Если бы некоторый объем газа при формировании вихря сжимался без изменения структуры, то в этом объеме неизбежно увеличивалось бы давление газа в связи с известным законом

$$P = RT/V,$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; V – объем. Но тогда и формирование самого вихря стало бы невозможным. Однако в формирующемся вихре различные слои находятся на разном расстоянии от центра, что приводит к тому, что они и движутся с разными скоростями – внутренние быстрее, чем наружные. Отсюда в каждой точке вихря имеется градиент скоростей, что существенно меняет всю картину. В соответствии с дифференциальной формой уравнения Бернулли при увеличении скорости потока должно снижаться давление:

$$\rho v dv + dP = 0$$

Снижение давления в газовом потоке будет означать снижение температуры и компенсироваться добавлением массы газа со стороны. Следовательно, в стенках тела вихря будут иметь место повышенная

плотность и пониженная температура, что и есть на самом деле. Нужно заметить, что приведенные соображения не являются строгими, поскольку сжатие тела вихря происходит за счет работы давления внешнего относительно тела вихря газа. Это давление разгоняет поток газа, таким образом, ускорение потока идет за счет добавления энергии в струи, а не просто перераспределения энергий, как это следует из уравнения Бернулли. Тем не менее, сам факт сжатия тела газового вихря говорит о том, что и плотность стенок вихря повышена, и температура стенок понижена. Это означает, что к поступательной скорости внутренних слоев вихря, вызванной сжатием вихря внешним давлением, добавляется скорость, связанная с перераспределением энергии тепла в энергию поступательного движения, тангенциальная скорость увеличивается ещё сильнее. Следует с сожалением констатировать, что механизм участия тепловой энергии хаотического движения молекул газа в поступательном движении потоков вихря рассмотрен в газовой динамике совершенно недостаточно. В связи со сложностью задачи здесь можно говорить о нем лишь предположительно, исходя из того несомненного факта, что газ в стенках вихря уплотнен и имеет пониженную относительно внешней среды температуру. Принципиально передача тепловой энергии внутренними слоями газа может происходить по двум направлениям – во внешнюю среду и в ускоряющиеся потоки самого тела вихря. Передача тепла во внешнюю среду может происходить за счет выброса центробежной силой молекул, обладающих наибольшей скоростью, из внутренних слоев во внешние (аналогично испарению жидкости с поверхности). Оставшиеся молекулы перераспределяют скорости, температура слоя оказывается пониженной. Передача тепловой энергии поступательно движущимся слоям может происходить за счет того, что средняя длина пробега молекул в тангенциальном направлении увеличивается. При сохранении удельной энергии газа происходит перераспределение между тангенциальной и нормальной скоростями: увеличение упорядоченной части тангенциальной составляющей движения приводит к сокращению тангенциальной части хаотического движения, в результате чего снижается скорость всего теплового движения. Температура падает:

$$T_2 = \frac{m\bar{u}_2^2}{3k} = \frac{m(\bar{u}_\tau^2 - v_\tau^2 + \bar{u}_\tau^2 + \bar{u}_l^2)}{3k} < T_1 = \frac{m(\bar{u}_\tau^2 + \bar{u}_\tau^2 + \bar{u}_l^2)}{3k}.$$

Здесь m – масса молекулы газа; τ – координата тангенциальной составляющей движения; координата r – радиальной; координата l – осевой; \bar{u} – средняя скорость хаотического (теплового) движения молекул; v_τ скорость упорядоченного тангенциального движения (скорость струи газа); k – постоянная Больцмана. Но в этом случае скорость внутренних потоков газа окажется больше, чем скорость, получаемая только за счет разгона газа внешним давлением окружающей вихрь среды, что существенно отличает этот процесс от движения твердого тела с переменным радиусом. Таким образом, хотя бы на качественном уровне

механизм потери тепловой энергии внутренними слоями вихря становится понятным, хотя в будущем этой задаче должно быть уделено более существенное внимание. При сжатии тела вихря внешним давлением имеем на поверхности вихря равенство давлений $P_e = P_{ц} + P_i$, где P_e – давление газа в свободном пространстве; $P_{ц}$ – давление, создаваемое центробежной силой на поверхности вихря; P_i – давление во внутренней области вихря. При этом

$$P_e = \rho_0 \frac{u_e^2}{2}, P_{ц} = \frac{v^2 \delta \rho}{r}, P_i = P_e \frac{T_i}{T_e}; \rho = \rho_0 \frac{T_i}{T_e}.$$

где ρ_0 – плотность газа в свободном пространстве, u_e – средняя скорость хаотического движения молекул, v – поступательная (тангенциальная) скорость движения стенки вихря; δ – толщина стенки; ρ – плотность газа в стенке вихря; r – радиус стенки вихря.

Обозначая $T_i/T_e = \kappa_T$, получим

$$\rho_0 \frac{u^2}{2} = \rho_0 \frac{v^2 \delta}{r \kappa_T} + \rho_0 \frac{v^2 \kappa_T}{2} \quad \text{или} \quad \kappa_T^2 - \kappa_T + 2 \frac{v^2 \delta}{u^2 r} = 0.$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$\kappa_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - 8 \frac{v^2 \delta}{u^2 r} \right)^{1/2} \approx 1 - 2 \frac{v^2 \delta}{u^2 r}.$$

И, таким образом, температура внутри вихря и в его стенке определится как

$$T_i = T_e \left(1 - 2 \frac{v^2 \delta}{u^2 r} \right),$$

а плотность стенки окажется равной

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - 2 \frac{v^2 \delta}{u^2 r}}.$$

Отсюда видно, что по мере увеличения скорости вращения вихря температура внутри него снижается, а плотность стенок увеличивается.

Внутри вихря в разреженной зоне тангенциальная скорость к центру будет плавно убывать, что напоминает убывание скорости во вращающемся твердом теле, хотя природа этого убывания иная. В отличие от жидких вихрей, центр которых заполнен жидкостью той же плотности, что и их периферия и который, как утверждает некоторыми авторами, вращается по закону твердого тела, что безусловно неверно, газовый вихрь имеет трубчатую структуру. В центральной части газового вихря давление газа понижено за счет разброса частиц из центра центробежной силой, а сам вихрь снаружи ограничен пограничным слоем с пониженными значениями температуры и вязкости и со значением плотности, плавно переходящим от высокой плотности стенки вихря к плотности газа в окружающей среде. Из изложенного следует, что газовый вихрь при своем образовании

концентрирует в себе энергию окружающей среды, и этот процесс кардинально отличается от любых других процессов, сопровождающихся рассеиванием энергии в окружающем пространстве.

Движение газа вокруг линейного вихря. Энергетический парадокс

В соответствии с известными положениями гидродинамики для несжимаемой жидкости вокруг вихревой нити устанавливается круговое движение жидкости, подчиняющееся закону

$$\Gamma = \oint v dl = \text{const},$$

где Γ – величина циркуляции; v – скорость движения жидкости вокруг центра вихря на расстоянии r от центра; dl – элемент длины потока. Отсюда скорость потока составляет $v = \Gamma / 2\pi r$, т.е. скорость потока обратно пропорциональна расстоянию от центра вихря и убывает по гиперболическому закону. Это положение, впервые сформулированное Г.Гельмгольцем и с тех пор излагаемое практически во всех систематических курсах по гидродинамике, на самом деле весьма не точно, так как ведет к энергетическому парадоксу, в соответствии с которым энергия движения жидкости вокруг единицы длины линейного вихря равна бесконечности при любом значении циркуляции. В самом деле, величина энергии движущейся вокруг центра вихря жидкости определится выражением

$$W = \int_V \rho v^2 / 2 dV = \int_l dl \int_R^\infty \rho \Gamma^2 \frac{2\pi r dr}{4\pi^2 r^2} = \frac{\Delta l \rho \Gamma^2}{2\pi} \int_R^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\Delta l \rho \Gamma^2}{2\pi} \ln r \Big|_R$$

или на единицу длины вихря имеем

$$w = \frac{W}{\Delta l} = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \ln r \Big|_R = \infty,$$

чего, разумеется, не может быть по чисто физическим соображениям. Вихревой энергетический парадокс на самом деле является всего лишь иллюстрацией недостаточности использованной модели, в данном случае – модели среды как несжимаемой и невязкой жидкости. Не следует забывать, что в соответствии с теоремами Гельмгольца вихри не могут быть созданы или уничтожены, хотя на самом деле они и возникают, и уничтожаются, что еще раз говорит о недостаточности использованной модели вихря как кругового движения несжимаемой и невязкой жидкости. Учет только сжимаемости приведет к нарушению закона распределения скорости по гиперболическому закону, а учет еще и вязкости приведет к необходимости учета энергетических потерь, что еще сократит расстояние, на котором вихревая нить приводит в движение окружающую его жидкость. Кроме того, все приведенные выше математически выводы вообще не учитывают процесса самого становления вихря, рассматривая

вихревую нить и движение окружающей его жидкости как некую вихревую статику, вообще не имеющую предыстории. Здесь нить не является причиной, приводящей в движение окружающую жидкость, нить и окружающая жидкость просто находятся в динамическом равновесии. На самом деле, в реальных физических условиях все это не так, вихрь является причиной, по которой движется окружающая его жидкость, на это движение вихрь должен затратить энергию, в результате чего энергетика самого вихря уменьшается. Движение в жидкости распространяется постепенно, соответственно постепенно уменьшается и энергетика вихря, что приводит к снижению скорости его вращения и увеличению его диаметра (диффузия вихря). А наличие вязкости делает этот процесс необратимым. Передача энергии сжимаемой жидкости неизбежно сопровождается ее сжатием, которое будет тем сильнее, чем ближе жидкость к телу вихря, это нарушит закон гиперболического уменьшения скорости движения жидкости в окрестностях вихря. Таким образом, в реальных ситуациях никакого «энергетического парадокса» нет, так же как никаких «парадоксов» природа вообще не знает. Все без исключения «парадоксы» суть результат нашего неполного, часто самого поверхностного знания о рассматриваемом предмете. Нечто аналогичное существует и в представлениях о движениях жидкости внутри вихря. Поскольку в соответствии с постоянством циркуляции по мере уменьшения радиуса скорость движения жидкости растет и при бесконечно малом радиусе становится бесконечно большой, то гидродинамики ввели постулат, согласно которому в центре вихря должен существовать некий kern, вращающийся по закону твердого тела, в котором скорость к центру вихря линейно уменьшается. Никаких физических соображений при этом не приводится, а только факт невозможности бесконечно больших скоростей. На самом деле все не так. Увеличение скорости движения среды внутри тела вихря, несомненно, имеет место, поскольку это непосредственно вытекает из механизма образования вихря и поскольку иначе будет нарушено динамическое равновесие жидкости. Но в сжимаемой жидкости в вихре, как это было показано выше, неизбежно образуются стенки вихря, в которых эта жидкость (на самом деле – газ, ибо само понятие «сжимаемая жидкость» противоречит физической сущности жидкости) сжимается. Эти стенки отделены от остальной массы жидкости пограничным слоем, в котором происходит плавный переход от скорости стенки к скорости окружающей среды, а также плавный переход плотности, температуры и вязкости. Внутри тела вихря должен иметь место такой же переход с той особенностью, что температура (возможно, и плотность) среды внутри вихря меньше, чем снаружи. А тогда не в уплотненном керне, которого вообще в вихре нет, а в этом разреженном внутреннем пространстве идет плавный переход от скорости внутренней поверхности стенок вихря к его центру. В первом приближении здесь можно, вероятно, оперировать сложением двух гипербол.

Образование и структура винтовых тороидальных газовых вихрей

Винтовой вихревой тороид газа представляет собой образование типа свернутой трубы, в полости которой давление и плотность газа ниже, чем в свободной среде, но в стенках газ существенно уплотнен.

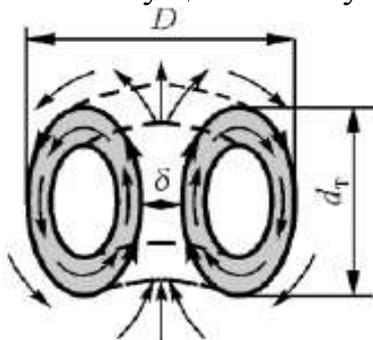


Рисунок 19-3. Тороидальный газовый вихрь в разрезе

Стенки трубы вблизи центральной оси обеспечивают в этом месте наиболее высокую плотность газа (исключая собственно осевое центральное отверстие), эта область может быть названа керном (ядром) винтового тороидального вихря. Как показали эксперименты с обычным дымовым тороидом, такая труба имеет эллипсоидальную форму, в результате чего диаметр тороида D меньше двух, но более одного диаметра тора d и составляет примерно $1,7d$, диаметр внутреннего отверстия тора δ равен примерно $0,25d$, а отношение осевых размеров эллипса равно примерно $0,7:1$. Вихревой винтовой тороид может характеризоваться интенсивностью тороидального движения, интенсивностью кольцевого движения и внутренней энергией.

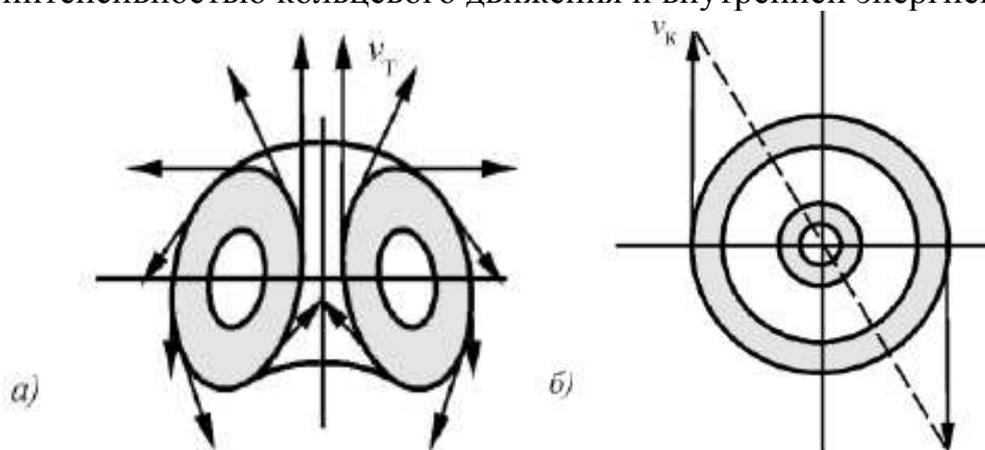


Рисунок 19-4. Тороидальное движение стенок (а) и кольцевое движение стенок (б)

20. 2005 год. Малюшевский – Явление кумуляции при взаимодействии вихревых колец

Одна из первых попыток теоретически описать явление кумуляции, исходя из внутренней баллистики активной разрядной зоны плазменного ускорителя с водой в качестве рабочей среды, была предпринята в соответствии с современными представлениями об импульсных течениях соответствующей геометрии. Не учитывались силы вязкости, действующие в приграничных со стенкой активной зоны слоях жидкости.



Рисунок 20-1. Форма выброса воды из плазменного ускорителя в атмосферу

Анализ показал, что ни один из расчетных режимов (в том числе и соответствующих экспериментальным) не обнаруживает кумуляцию на продольной оси ультраструи, хотя и показывает в первые моменты истечения скорость в этой зоне на 10–15% большую скорости участков, находящихся на расстоянии половины радиуса струи. В целом же скорость плавно снижается от оси к внешней границе ультраструи. Заметим, что расчетная скорость ультраструи соответствует скорости струи, получаемой экспериментально. Выявилось недопонимание природной сути наблюдаемого явления.



Рисунок 20-2. Форма выброса воды из плазменного ускорителя в вакуумную камеру

Внимательное изучение материалов известных экспериментальных исследований высоконапорных импульсных струй воды, генерируемых импульсными водометами, показало, что характер истечения жидкости из плазменного ускорителя с конденсированной средой существенно иной. Струи, генерируемые плазменным ускорителем, оказываются значительно более устойчивыми; здесь имеются четко разделенные участки кумулятивной струи и ультраструи, они не разрушаются при взаимодействии в сверхзвуковом движении сквозь плотный воздух атмосферы, но, очевидно, только стабилизируются. Высоконапорные импульсные струи не имеют кумулятивных выбросов и движутся,

фактически разрушаясь при взаимодействии с воздухом, превращаясь в облако брызг. Таким образом, их морфология, динамика и течения существенно отличаются от наблюдаемых для струй, генерируемых плазменным ускорителем и взаимодействующими в ультраструе вихревыми кольцами. Столь противоположное влияние плотного атмосферного воздуха, в одном случае стабилизирующего устойчивость импульсной струи, в другом - способствующего потере устойчивости, может объясняться только различием структур истекающих струй. Воздух не дает возможность быстро развалиться вихревым кольцам в ультраструе и соответственно способствует "игре" водяных вихревых колец в ней. Это подтверждает эксперимент по метанию плазменным ускорителем ультраструй из плазменного ускорителя в вакуумируемую камеру. С понижением давления воздуха в камере ультраструи становятся неустойчивыми, и при давлении ниже 0,06 МПа кумулятивные выбросы не образуются, а первое вихревое кольцо сразу после выхода за срез ускорителя теряет устойчивость и разваливается.

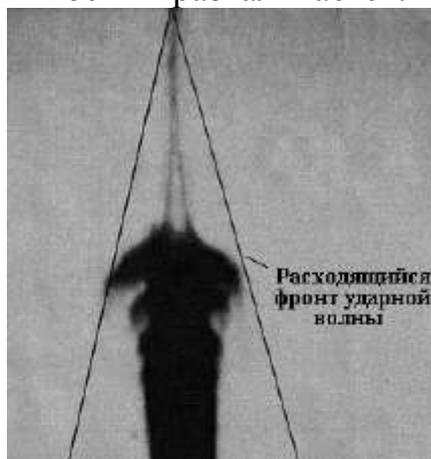


Рисунок 20-3. Схема расходящегося от сверхзвуковой струи фронта ударной волны

Иное дело - движение метаемых ультраструй в плотном воздухе. Процесс пронизывания плотного воздуха высокоскоростной водяной ультраструей без потери устойчивости существенно облегчается за счет того, что она вместе с "играющими" вихревыми кольцами генерирует кумулятивный выброс, движущийся со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе. То есть "материнская" ультраструя движется с дозвуковой (хотя и высокой) скоростью фактически внутри пространства, ограниченного конической, воздушной ударной волной, порождаемой головой кумулятивной струи, вернее, в маловозмущенной и менее плотной среде, возникающей за срезом ударной волны. Это те процессы, которые происходят вне плазменного ускорителя. Все же отличия начинаются внутри плазменного ускорителя, в его активной разрядной зоне.

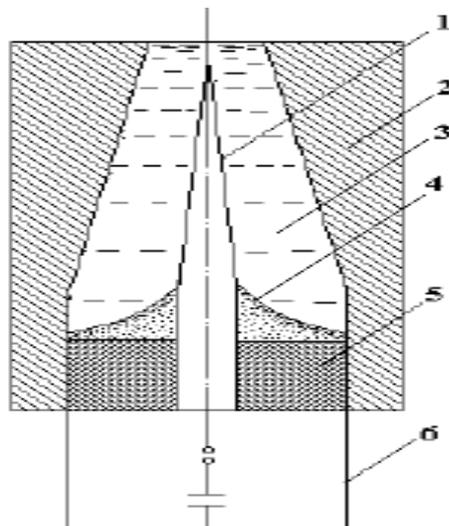


Рисунок 20-4. Схема активной зоны плазменного ускорителя

Активная зона плазменного ускорителя представлена на рисунке выше, где анод 1, катод 2, проходной изолятор 5 и свободная поверхность жидкости образуют характерное коаксиально-коническое пространство, в котором и находится метаемая доза жидкости 3. Выбрасывает жидкость плазменное образование 4, образуемое (изначально у внутренней торцевой поверхности проходного изолятора) после включения внешнего разрядного контура 6. Механизм формирования в активной зоне плазменного ускорителя ультраструй, а затем вне активной зоны кумулятивных струй жидкости следующий. За счет несимметричности магнитного давления тока разряда в радиально-щелевом пространстве активной зоны и особенности гидродинамики течения жидкости в кольцевом канале того же пространства участки сомкнутого плазменного образования, прилегающие к аноду 1, движутся быстрее, чем участки струи, по радиусу более удаленные от центральной оси. Соответственно с самого начала процесса ускорения приосевые участки жидкости приобретают большую скорость, придавая границе раздела плазма-жидкость коноидальную форму. Основной токовый слой простирается именно под этой поверхностью. На выходе из активной зоны за анодом в приосевой области непрерывно поддерживается зона пониженного давления. Граница раздела плазменный поршень-вода, двигаясь на выход из активной зоны, под действием изменения газокINETического и магнитного давлений пульсирует, ее скорость изменяется в соответствии с изменением тока в разрядном контуре.

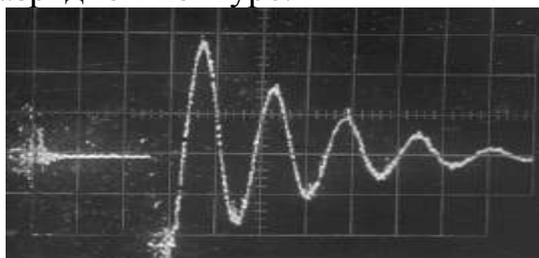


Рисунок 20-5. Осциллограмма тока в разрядном контуре плазменного ускорителя

За счет наличия сил трения и вязкости при таком пульсирующем режиме ускорения на внешней границе вязкого подслоя у стенок, ограничивающих активную зону, начинается интенсивный рост турбулентных вихрей, их попарное слияние и формирование группы вихревых колец, ускоряемых на выходе из активной зоны. Характерным для систем вихревых колец является то, что вихревые линии представляют собой замкнутые окружности, центры которых расположены на одной прямой. Впервые такой класс движений вихрей в идеальной безграничной жидкости рассмотрен Г. Гельмгольцем, установившим, что вихревое кольцо малого конечного поперечного сечения движется, не изменяя радиуса центра тяжести поперечного сечения, с постоянной, но весьма большой скоростью, направленной в сторону, куда жидкость течет сквозь кольцо. В то же время у вихревого кольца обнаружено замечательное свойство продвигаться на сравнительно большие (в сравнении с собственными размерами) расстояния, сохраняя во времени свою устойчивую форму. При определенных внешних воздействиях, производящих как бы смыкание траекторий движения частиц жидкости в завихренности (внутренний диаметр тора вихревого кольца стремится к нулю), вихревое кольцо превращается в движущийся сферический вихрь (вихрь Хилла). В экспериментальных исследованиях процессов истечения импульсных ультраструй из плазменных ускорителей обнаружено, что при определенных режимах метания жидкости (воды) возникает нетривиальное явление возбуждения вихревых колец непосредственно в ультраструе. Их всегда больше двух. Теоретические исследования процессов взаимодействия нескольких вихревых колец наталкиваются на огромные математические трудности, и в настоящее время решение таких задач не существует. Поэтому внимательное изучение полученных экспериментальных данных особенно интересно. Вероятно, для генерируемых в плазменном ускорителе вихревых колец "автоматически" обеспечивается равенство скоростей колец на бесконечности, и кольца образуют связанную систему. Подведенная к системе начальная энергия значительно больше энергии вихревых колец на бесконечном удалении. Известно, что чем больше начальная энергия взаимодействия колец, тем на меньшее расстояние отходят они друг от друга, что хорошо видно на соответствующих кадрах наших кинограмм. Переднее вихревое кольцо, движущееся в реальной ультраструе в условиях сжатия потока, еще на выходе из активной зоны плазменного ускорителя, за счет вязкого взаимодействия сходящихся струйных течений, превращается в вихрь Хилла. Исследовалась реакция сферического вихря Хилла на некоторые осесимметричные возмущения его поверхности. Установлены интересные детали поведенческих реакций вихря Хилла при таких возмущениях. Так, при незначительном растяжении сферы вдоль оси движения, то есть когда вихрь Хилла в начальный момент имеет форму вытянутого сфероида, определенная часть завихренной жидкости вытягивается в виде длинного шлейфа вниз по течению, провоцируя процесс кумулятивного выброса

жидкости, тогда как основная часть массы завихренной жидкости остается в сферической форме. Но подторможенный вихрь Хилла догоняет вихревое кольцо, шедшее вторым, охватывает его и "выжимает" содержимое в шлейф, как кумулятивную струю. Если начальная форма вихря является сплюснутым сфероидом, то картина будет иной. Безвихревая жидкость будет захватываться через кормовую точку, продвигаться внутри вихря и почти достигать носовой точки. В отсутствие шлейфа кумулятивный выброс не может образоваться, а истекающая ультраструя тормозится на вихре Хилла и принимает в головной части грибообразную форму.

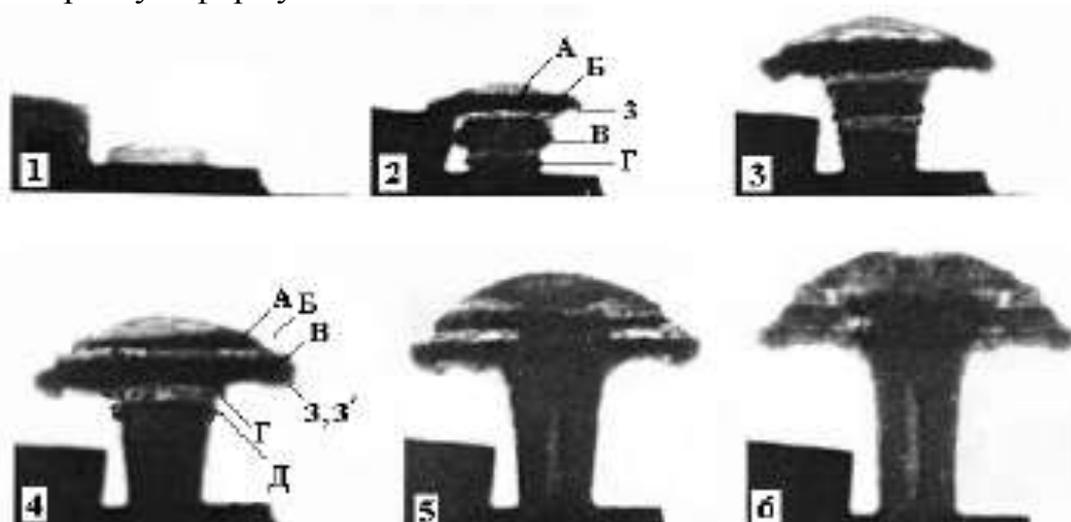


Рисунок 20-6. Ультраструя с кумуляцией, заторможенной на вихре Хилла

Таким образом, при экспериментальных исследованиях импульсных плазменных ускорителей, работающих в конденсированной среде, обнаружено новое, интересное явление возбуждения вихревых колец в метаемой струе, их взаимодействие между собой, с генерированием кумулятивных выбросов по оси основной ультраструи. Подробно рассмотрен механизм возникновения необычной формы кумуляции, который в дальнейшем позволит построить теоретическую модель явления.

Литература

1. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наук.думка, 1993. С.244-257 (В.Роджерс. О формировании вращающихся колец воздухом и жидкостями).
2. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.: ИКИ, 2002. 82 с.
3. Томпсон Дж. Дж. Электричество и материя. Москва-Ижевск. 2004г. С. 184 – 198 (Вильям Томсон Кельвин. О вихревых атомах).
4. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. Собрание сочинений. Т.2. М.-Л. 1949. С.474-488 (Лекция VIII. О кажущемся взаимодействии тел, находящихся в беспредельной массе движущейся жидкости).
5. Томпсон Дж. Дж. Электричество и материя. Москва-Ижевск. 2004г. С. 172–184 (Жуковский Н.Е. Основы теории вихрей).
6. Вуд Р. Вихревые кольца. Библиотечка «КВАНТ» выпуск 4. Опыты в домашней лаборатории. М., Наука, Гл. ред. Физ-мат. лит. 1981 г. Стр. 13.
7. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. Собрание сочинений. Т.2. М.-Л. 1949. С.689-696 (Заметка о движении вихревых колец).
8. Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т.1. Равновесие. Движение жидкостей без трения. М.-Л. 1933. С.182-188
9. Ламб Г. Гидродинамика // ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград. 1947.
10. Кастерин Н.П. Обобщение основных уравнений аэродинамики и электродинамики. Доклад на особом совещании при Академии Наук СССР 9 декабря 1936 года. Москва. 1937.
11. Прандтль Л. Гидроаэромеханика – 2 изд.: Пер с нем. М.: ИИЛ, 1951.
12. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie. М.:Иностранная литература, 1963, С.1-34
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, ГРФМЛ. 1974. С.480-483
14. Фейнман Р, Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.7.Физика сплошных сред. М.: Мир. 1965. С.232-253
15. Шабанов С, Шубин В. О вихревых кольцах. Библиотечка «КВАНТ» выпуск 4. Опыты в домашней лаборатории. М., Наука, Гл. ред. Физ-мат. лит.1981 г. Стр. 18.
16. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наук.думка, 1993. С.72-221.
17. Ахметов Д.Г. Формирование и основные параметры вихревых колец. // ПМТФ.2001. №5. Т.42. С.70–83
18. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Институт теплофизики им.С.С. Кутателадзе. Новосибирск. 2003. 504 с.
19. Ацюковский В.А. Общая эфиродинамика. М.:Энергоиздат. 2003. С.127-164.
20. Малюшевский П.П. Явление кумуляции при взаимодействии вихревых колец (Часть II. Обсуждение экспериментальных наблюдений). Электронная обработка материалов. 2005, N.3, сс.36-40